Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques
B. Keller

Année universitaire 2003–04
Représentations de carquois
14/06/2004

Examen de juin 2004

Avertissement : L'utilisation de documents autres que les notes de cours est interdite. Dans tout l'énoncé, k désigne un corps algébriquement clos et les modules considérés sont de dimension finie sur k.

I. Représentations de $\vec{D}_4$

Soit Q le carquois de graphe sous-jacent D_4

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\varphi"'] \\ 0 & 2 \arrow[l] \\ & 3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

1) Quelles sont (à isomorphisme près) les représentations projectives indécomposables et les représentations injectives indécomposables de Q ? Quelles sont les représentations simples ?
2) Soit V une représentation de Q. Montrer que les applications $V_i \to V_0$, $i = 1, \ldots, 3$, sont injectives si V n'a pas de facteur direct simple injectif.
3) Déterminer les vecteurs dimension des représentations indécomposables de Q et son carquois d'Auslander-Reiten. Décrire la représentation indécomposable de vecteur dimension [2111].
4) Rappeler la formule d'Auslander-Reiten. Montrer que $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(V, W)$ s'annule si V et W sont des représentations indécomposables dont les vecteurs dimension sont parmi les suivants : [1010], [1011], [1110], [0010].
5) Soit $v = [6372]$. Soit U l'ensemble des points de la variété des représentations de vecteur dimension v qui correspondent à des sommes d'indécomposables de vecteurs dimension du point précédent. Montrer que U est un ouvert non vide.

II. Une proposition d'Auslander

Soit A une algèbre associative de dimension finie. Soient L et M deux modules. On se propose de montrer que L et M sont isomorphes si l'on a

$$\dim \mathrm{Hom}_A(L, X) = \dim \mathrm{Hom}_A(M, X)$$

pour tout module X. Notons que la réciproque est triviale. Soit $A-\text{ind}$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables. Par le théorème de Krull-Schmidt, il existe des entiers $\mu_U(L)$ presque tous nuls, uniques, tels que

$$L \cong \bigoplus_{U \in A-\text{ind}} U^{\mu_U(L)}.$$

Pour un A-module X, on définit

$$\lambda_X(L) = \dim \operatorname{Hom}_A(L, X).$$

1) Nous considérons la catégorie $\operatorname{Fun}(A)$ des foncteurs contravariants de type fini de la catégorie $A-\text{mod}$ vers $k-\text{mod}$. Rappeler la définition du foncteur simple S_U associé à U et vérifier que $\mu_U(L) = \dim S_U(L)$.
2) Supposons que U est un indécomposable projectif. Soit R son radical. Montrer que

$$\mu_U(L) = \lambda_U(L) - \lambda_R(L).$$

3) Supposons que U est un indécomposable non projectif. Soit

$$0 \to \tau U \to E \to U \to 0$$

la suite d'Auslander-Reiten qui se termine en U. Montrer que

$$\mu_U(L) = \lambda_U(L) - \lambda_E(L) + \lambda_{\tau U}(L).$$

4) Conclure.

III. Modules tubulaires simples sur $\widetilde{D}_4$

Soit Q un carquois fini connexe sans cycles orientés. Pour tout sommet i, notons S_i le module simple associée à i, P_i l'indécomposable projectif et I_i l'indécomposable injectif. Pour un module M, notons $\underline{\dim}\, M \in \mathbf{Z}^{Q_0}$ son vecteur dimension. Soit $\langle , \rangle$ la forme d'Euler, de façon qu'on a

$$\langle \underline{\dim}\, L, \underline{\dim}\, M \rangle = \dim \operatorname{Hom}_{kQ}(L, M) - \dim \operatorname{Ext}^1_{kQ}(L, M).$$

1) Montrer que les $\underline{\dim}\, P_j$, $j \in Q_0$, forment une base de $\mathbf{Z}^{Q_0}$. Indication : on pourra considérer les coordonnées de ces vecteurs dans une base bien choisie de $\mathbf{Z}^{Q_0}$.
2) Montrer qu'il existe un automorphisme

$$c : \mathbf{Z}^{Q_0} \to \mathbf{Z}^{Q_0}$$

tel que $c(\underline{\dim}\, P_i) = -\underline{\dim}\, I_i$ pour tout sommet i de Q. On appelle c la *transformation de Coxeter.*
3) Montrer que si P est projectif, on a $c(\underline{\dim}\, P) = -\underline{\dim}\, \nu(P)$, où ν est le foncteur de Nakayama.
4) Montrer que si M est un indécomposable non projectif, on a $c(\underline{\dim}\, M) = \underline{\dim}\, \tau(M)$. De même, si M est un indécomposable non injectif, alors on a $c^{-1}(\underline{\dim}\, M) = \underline{\dim}\, \tau^{-1}(M)$.

5) Montrer que pour $v, w \in \mathbf{Z}^{Q_0}$, on a

$$\langle v, w\rangle = -\langle w, c(v)\rangle = \langle c(v), c(w)\rangle.$$

6) A partir de maintenant, supposons que Q est un carquois de Dynkin étendu. Notons δ sa plus petite racine imaginaire. Pour $v, w \in \mathbf{Z}^{Q_0}$, notons $(v, w) = \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle$ et $q(v) = \langle v, v\rangle$. Rappelons que q est la forme de Tits associée à Q et $(,)$ sa forme bilinéaire associée.

   a) Montrer qu'un vecteur $v \in \mathbf{Z}^{Q_0}$ appartient au radical de q ssi $c(v) = v$.
   b) Montrer qu'il existe un entier $h \geq 1$ et une forme linéaire $\varphi : \mathbf{Z}^{Q_0} \to \mathbf{Z}$ tels que, pour tout vecteur $v \in \mathbf{Z}^{Q_0}$, on ait

   $$c^h(v) = v + \varphi(v)\delta$$

   (le plus petit entier h avec cette propreté s'appelle le *nombre de Coxeter de Q*). Indication : On pourra montrer que c induit un automorphisme de $\mathbf{Z}^{Q_0}/\mathbf{Z}\delta$ qui permute les éléments d'une partie finie génératrice.
   c) Rappelons qu'un indécomposable V sur kQ est postprojectif ssi $\tau^n(V)$ est projectif pour un $n \geq 0$. Montrer que V est postprojectif si $\varphi(\underline{\dim}\, V) < 0$.
   d) Réciproquement, soit V un indécomposable postprojectif. Montrer que l'on a $\varphi(\underline{\dim}\, V) < 0$.
   e) Déduire qu'un indécomposable V est postprojectif (resp. préinjectif) ssi $\varphi(\underline{\dim}\, V) < 0$ (resp. $\varphi(\underline{\dim}\, V) > 0$).

7) On appelle *tubulaire* un module qui n'a aucun facteur direct postprojectif et aucun facteur direct préinjectif. Rappelons que sur une algèbre héréditaire de dimension finie A, l'équivalence $\tau : A - \underline{\mathrm{mod}} \to A - \overline{\mathrm{mod}}$ se relève en un foncteur *exact à gauche* noté encore $\tau : A - \mathrm{mod} \to A - \mathrm{mod}$.

   a) Montrer que pour un module U, on a équivalence entre
      (i) U est tubulaire;
      (ii) on a $\varphi(\underline{\dim}\, U) = 0$ et $\varphi(\underline{\dim}\, V) \leq 0$ pour tout sous-module V de U;
      (iii) on a $\varphi(\underline{\dim}\, U) = 0$ et $\varphi(\underline{\dim}\, W) \geq 0$ pour tout quotient W de U.
   b) Soit $f : V \to V'$ un morphisme entre modules tubulaires. Montrer que le noyau, l'image et le conoyau de f sont encore tubulaires.

8) On appelle *tubulaire simple* un module tubulaire non nul qui n'admet pas de sous-module tubulaire autre que 0 et lui-même. On se propose de classifier les modules tubulaires simples pour le carquois Q donné par

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 1 \arrow[ddl] \\
 & 2 \arrow[dl] \\
0 & \\
 & 3 \arrow[ul] \\
 & 4 \arrow[uul]
\end{tikzcd}$$

On note Q' le sous-carquois plein de sommets $0, \ldots, 3$.

   a) Calculer les vecteurs dimension de $\tau^i I_j$ pour $0 \leq j \leq 4$ et $0 \leq i \leq 2$.

b) Déduire du calcul précédent que l'on a $c^2(v) = v + \varphi(v)\delta$ où $\varphi(v) = -2v_0 + v_1 + v_2 + v_3$.

c) Pour une partie I de $\{1, \ldots, 4\}$ formée de deux éléments, soit $V = V(I)$ la représentation de Q donnée par un espace vectoriel V_0 de dimension 1 et quatre sous-espaces V_i, $1 \leq i \leq 4$, tels que $V_i = V_0$ si $i \in I$ et $V_i = 0$ sinon. Montrer que V est tubulaire simple.

d) Soit V la représentation de Q donnée par un espace vectoriel V_0 de dimension 2 et quatre droites $V_1, \ldots, V_4$ distinctes deux à deux dans V_0. Montrer que V est tubulaire simple. Etablir une bijection naturelle entre les classes d'isomorphisme de ces représentations et les points de la droite projective sur k privée des trois points 0, 1, ∞. On note $V(x)$ la représentation qui correspond à un point x.

e) Pour une représentation U de Q', notons U^0 son *extension par* 0 *à* Q, c'est-à-dire que $U^0_4 = 0$ et que la restriction de U^0 à Q' est U. Calculer (à l'aide de l'exercice I), pour chaque représentation indécomposable U de Q', les nombres $\varphi(\underline{\dim}\, U^0)$ et $\dim U_0$. Les indiquer aux sommets du carquois d'Auslander-Reiten de Q'.

f) Montrer que toute représentation tubulaire simple est isomorphe à l'une des représentations $V(x)$ ou $V(I)$ décrites ci-dessus.

9) Question facultative : calculer les groupes d'extensions entre représentations tubulaires simples.

Remarque : La connaissance des représentations tubulaires simples et de leurs groupes d'extensions permet de montrer qu'on a une équivalence de catégories

$$k[x, x^{-1}, (1-x)^{-1}] - \text{mod} \times T_2 \times T_2 \times T_2 \to \mathcal{T}$$

où $\mathcal{T}$ est la sous-catégorie des représentations tubulaires et T_2 est la catégorie des mailles d'un tube de circonférence 2. Les modules $V(I)$ correspondent aux points de la bouche des tubes de circonférence 2 et les modules $V(x)$ aux modules simples sur $k[x, x^{-1}, (1-x)^{-1}]$.