Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques
B. Keller

Année universitaire 2004–05
Représentations de carquois
19/05/2005

Examen de mai 2005

Avertissement : L'utilisation de documents autres que les notes de cours est interdite. Dans tout l'énoncé, sauf mention expresse du contraire, k désigne un corps algébriquement clos et les modules considérés sont de dimension finie sur k.

I. Représentations de $\vec{A}_4$

Soit Q le carquois de graphe sous-jacent A_4

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4.$$

1) Quelles sont (à isomorphisme près) les représentations projectives indécomposables et les représentations injectives indécomposables de Q ? Quelles sont les représentations simples ?
2) Soit V une représentation *projective* de Q dont le vecteur dimension est $v = [4, 9, 2, 3]$. Quelle peut être la décomposition de V en indécomposables ?
3) Déterminer les vecteurs dimension des représentations indécomposables de Q et son carquois d'Auslander-Reiten.
4) Rappeler la formule d'Auslander-Reiten. Montrer que $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(V, W)$ s'annule si V et W sont des représentations indécomposables dont les vecteurs dimension sont parmi les suivants : [0001], [0111], [1111], [0011].
5) Soit $v \in \mathbf{N}^4$. Rappeler pourquoi $\mathrm{rep}(Q, v)$ contient une unique $GL(v)$-orbite ouverte dense. On appelle *générique* la représentation qui correspond aux points de cette orbite.
6) Quelle est la décomposition[1] en indécomposables de la représentation générique de vecteur dimension [1234] ?

II. Représentations sur les réels

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les triplets (V_1, V_2, V_f), où V_1 est un espace vectoriel réel de dimension finie, V_2 un espace vectoriel complexe de dimension finie et

$$V_f : V_1 \to V_2|_{\mathbf{R}}$$

une application $\mathbf{R}$-linéaire de V_1 dans l'espace vectoriel réel $V_2|_{\mathbf{R}}$ sous-jacent à V_2. Un morphisme $V \to V'$ de $\mathcal{C}$ est donné par un couple (g_1, g_2) formé d'une application $\mathbf{R}$-linéaire $g_1 : V_1 \to V_1'$ et d'une application $\mathbf{C}$-linéaire $g_2 : V_2 \to V_2'$ telles que $V_{f'} g_1 = g_2 V_f$.

[1] L'énoncé original, erroné, demandait la décomposition générique de [1232]. Cette dernière est donnée par la somme des indécommposables de vecteurs dimension [1111], [0110] et [0011].

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des représentations réelles de dimension finie de la **R**-algèbre associative

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

i.e. la sous-algèbre réelle de $M_2(\mathbf{C})$ formée des matrices

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix},$$

telles que $a \in \mathbf{R}$, $b, c \in \mathbf{C}$. Déduire que $\mathcal{C}$ est additive et que tout objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à une somme finie d'objets indécomposables uniques à isomorphisme et permutation près.

2) Calculer les anneaux d'endomorphismes des objets suivants de $\mathcal{C}$. Déduire qu'ils sont indécomposables. Lesquels parmi ces objets sont projectifs, resp. injectifs resp. simples ?

$$U = (\mathbf{R} \to 0)\,, \quad V = (0 \to \mathbf{C})\,, \quad W = (\mathbf{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbf{C})\,, \quad T = (\mathbf{R} \xrightarrow{incl} \mathbf{C}).$$

3) Montrer que les objets de la question précédente forment un système de représentants des classes d'isomorphisme des indécomposables de $\mathcal{C}$.

III. Relations de Serre dans les algèbres de Hall

1) Soit A un anneau. Un A-*module fini* est un A-module à gauche dont l'ensemble sous-jacent est fini. Si $X_1, \ldots, X_t$ et Z sont des A-modules finis, on définit $F^Z_{X_1,\ldots,X_t}$ comme le nombre de chaînes décroissantes

$$Z = Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_{t-1} \supset Z_t = 0$$

de sous-modules de Z tels que Z_{i-1}/Z_i est isomorphe à X_i, pour $1 \le i \le t$. On suppose que pour tous A-modules finis X_1, X_2, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de A-modules finis Z tels que $F^Z_{X_1,X_2} \neq 0$. Soit $\mathcal{H}(A)$ le groupe abélien libre engendré par des symboles u_X indexés par les classes d'isomorphisme X de A-modules finis. On définit une loi **Z**-bilinéaire sur $\mathcal{H}(A)$ par

$$u_X u_Y = \sum_Z F^Z_{XY} u_Z.$$

a) Montrer que la loi définie ci-dessus est associative. On appelle $\mathcal{H}(A)$ muni de cette loi *l'algèbre de Hall* associée à A.

b) Soient p un nombre premier, $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Montrer que dans $\mathcal{H}(A)$, on a

$$u_M u_M = (p+1)\, u_{M\oplus M} + u_{\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}}.$$

c) Soient k un corps à $q < \infty$ éléments, Q le carquois $1 \to 2$ et $u_i = u_{S_i}$, $i = 1, 2$. Montrer qu'on a

$$u_1 u_2^2 - (q+1)\, u_2 u_1 u_2 + q\, u_2^2 u_1 = 0$$

dans $\mathcal{H}(kQ)$. Indication : on pourra exprimer $u_1 u_2^2$, $\ldots$ en termes de $u_{S_1^1 \oplus S_2^2}$ et $u_{I_2 \oplus S_2}$, où I_2 est l'injectif indécomposable de socle S_2.

2) Soient Q un carquois fini sans cycle orienté et k un corps à $q < \infty$ éléments. Pour tout entier positif n, on définit le nombre quantique $[n]$ et le factoriel quantique $[n]!$ par

$$[n] = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{et} \quad [n]! = [1][2]\cdots[n]\,.$$

Pour tous entiers positifs n, t, on définit le coefficient binomial quantique

$$\begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[t]!\,[n-t]!}\,.$$

Pour tout sommet i de Q, notons $u_i = u_{S_i}$. Soient i, j deux sommets de Q tels qu'il n'existe pas de flèche de i à j. Soient n' le nombre de flèches de j à i et $n = n' + 1$. On se propose de montrer[2] que dans $\mathcal{H}(kQ)$, on a la *relation de Serre*

$$\sum_{t=0}^{n} (-1)^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} u_i^t u_j u_i^{n-t} = 0\,.$$

a) Soient $t \leq d$ des entiers positifs et V un k-espace vectoriel de dimension d. Quel est le nombre de droites dans V ? Soit $U \subset V$ un sous-espace de dimension d'. Quel est le nombre de droites dans V/U ? Montrer que le nombre de suites

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_t \subset V$$

de sous-espaces vectoriels telles que $\dim V_i = i$, $1 \leq i \leq t$, est égal à

$$[d][d-1]\cdots[d-t+1] = \frac{[d]!}{[d-t]!}\,.$$

Montrer que c'est également le nombre de suites de sous-espaces

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_t$$

tels que $\dim V_i = \dim V - i$, $1 \leq i \leq t$.

b) Soit R le sous-carquois plein de Q dont les sommets sont i et j. Le carquois R comporte donc $n-1$ flèches $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ de j à i et aucune autre flèche. Soit M une représentation de R telle que $\dim M_i = n$ et $\dim M_j = 1$. Soit d la codimension de la somme des images des M_{α_l} dans M_i. Montrer que

$$\dim \operatorname{Hom}(M, S_i) = d.$$

Montrer que l'on a $M = N \oplus S_i^d$, où N est une représentation indécomposable telle que $\dim N_j = 1$. Calculer les espaces de morphismes

$$\operatorname{Hom}(N, S_i)\,,\ \operatorname{Hom}(S_i, N)\,,\ \operatorname{Hom}(N, S_j)\,,\ \operatorname{Hom}(S_j, N).$$

Déduire du résultat que le plus grand quotient semi-simple de N est S_j et que le radical de N est isomorphe à S_i^{n-d}.

c) Soit M une représentation de Q. Notons $a_t(M)$ le coefficient de u_M dans $u_i^t u_j u_i^{n-t}$. Supposons que $a_t(M) > 0$.
Montrer que $M_l = 0$ pour $l \notin \{i, j\}$ de façon qu'on peut considérer M comme une représentation de R. Montrer que $\dim M_i = 1$ et $\dim M_j = n$. Montrer que dans les notations de la question précédente, on a $d \geq 1$ et $t \leq d$.

[2]suivant C. M. Ringel, Inv. Math. 101 (1990), 583-592

d) Sous les mêmes hypothèses sur M, soit

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_t \supset M_{t+1} \supset \cdots \supset M_n \supset M_{n+1} = 0$$

une chaîne décroissante de sous-représentations telle que les sous-quotients M_{s-1}/M_s sont simples pour $1 \leq s \leq n+1$. Montrer qu'on a $M_{s-1}/M_s \xrightarrow{\sim} S_i$ pour $s \neq t+1$ et $M_t/M_{t+1} \xrightarrow{\sim} S_j$ ssi M_t contient N et que M_{t+1} est contenu dans $(\mathrm{rad}N) \oplus S_i^d$.

e) Sous les mêmes hypothèses sur M, montrer qu'on a

$$a_t(M) = \frac{[d]!\,[n-t]!}{[d-t]!}.$$

f) Montrer que

$$\begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} a_t(M) = [n]! \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix}$$

g) Montrer que dans $\mathbf{Z}[X]$, on a

$$\sum_{t=0}^{d} \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} X^t = \prod_{i=0}^{d-1} (1 + q^i X).$$

Déduire que pour $d \geq 1$, on a

$$\sum_{t=0}^{d} (-1)^t \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} = 0.$$

h) Montrer que

$$\sum_{t=0}^{d} (-1)^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} q^{\frac{t(t-1)}{2}} a_t(M) = 0$$

et conclure.