Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques
B. Keller

Année universitaire 2003–04
Représentations de carquois
06/09/2004

Examen de septembre 2004

Avertissement : L'utilisation de documents autres que les notes de cours est interdite. Dans tout l'énoncé, k désigne un corps algébriquement clos et les modules considérés sont de dimension finie sur k.

I. Représentations indécomposables et représentations stables de A_n

Soit Q un carquois fini. Notons Q_0 son ensemble de sommets et Q_1 celui de ses flêches. Soit θ une application $\mathbf{Z}$-linéaire du groupe $\mathbf{Z}^{Q_0}$ dans $\mathbf{Z}$. Pour une représentation V de Q, son vecteur dimension $\underline{\dim} V$ est la famille des entiers $\dim V_i$, $i \in Q_0$. On note $\dim V$ sa dimension total, égale à la somme des $\dim V_i$, $i \in Q_0$. On note $\pi_\theta(V)$ le vecteur $(\dim V, \theta(V))$ et, pour $\dim V \neq 0$, on note $p_\theta(V)$ sa pente , c'est-à-dire que

$$p_\theta(V) = \frac{\theta(\underline{\dim} V')}{\dim V'}.$$

Une représentation non nulle V de Q est *θ-stable* si la pente de V est strictement supérieure à la pente de toute sous-représentation non nulle propre V' de V. Une représentation V de Q est *θ-semistable* si elle est nulle ou si sa pente est supérieure ou égale à la pente de toute sous-représentation non nulle propre V' de V. Notons que toute représentation stable est semi-stable.

1) Montrer que toute représentation simple est stable.
2) Soit
$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$
une suite exacte de représentations non nulles de Q. Montrer que l'on a
$$\pi_\theta(V') + \pi_\theta(V'') = \pi_\theta(V).$$
En déduire que l'on a
$$p_\theta(V') \leq p_\theta(V) \leq p_\theta(V'') \text{ ou } p_\theta(V'') \leq p_\theta(V) \leq p_\theta(V')$$
et que $p_\theta(V') = p_\theta(V)$ ssi $p_\theta(V) = p_\theta(V'')$. Indication : faire un dessin.
3) Montrer qu'une représentation non nulle V est stable (resp. semistable) ssi l'on a $p_\theta(V'') > p_\theta(V)$ (resp. $\geq$) pour tout quotient V'' de V.
4) Montrer que la somme de deux représentations semistables de même pente est semistable.
5) Soit q un nombre rationnel. Montrer que la classe des représentations semistables de pente q est stable par passage aux extensions, aux sous-représentations et aux quotients.
6) Montrer qu'une représentation est stable de pente q ssi elle est semistable de pente q et n'admet pas de sous-représentations semistables de pente q.

7) Montrer qu'une représentation non nulle V est stable ssi l'on a $p_\theta(V') < p_\theta(V)$ pour toute sous-représentation indécomposable V' de V. Enoncer et démontrer un critère analogue portant sur les quotients indécomposables de V.

8) Soit n un entier strictement positif. Supposons que Q est le carquois $\vec{A}_n$:

$$1 \to 2 \to \ldots \to n$$

Quelles sont les représentations indécomposables de Q ?

9) Soit V une représentation indécomposable de Q. Quelles sont ses sous-représentations ?

10) Exhiber une fonction θ telle que les représentations stables de Q soient exactement les représentations indécomposables. Indication : on pourra commencer par les cas $n = 2, 3, \ldots$.

II. Construction de dégénérations

Soit Q un carquois fini, A son algèbre de chemins et L, M, N trois A-modules de dimension finie. Supposons donnée une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\;i\;} L \oplus M \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad \text{où } i = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

1) Montrer que si f est inversible, alors N est isomorphe à M. Indication : on pourra considérer l'application $[-gf^{-1}, \mathbf{1}]$ de $L \oplus M$ dans M.

2) Soit $\lambda \in k$. On définit N_λ comme le conoyau de

$$\begin{bmatrix} f + \lambda \mathbf{1} \\ g \end{bmatrix}$$

de façon qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\;i_\lambda\;} L \oplus M \longrightarrow N_\lambda \longrightarrow 0 \quad \text{où } \begin{bmatrix} f + \lambda \mathbf{1} \\ g \end{bmatrix}.$$

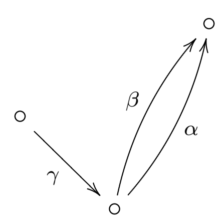
Montrer qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $U \subset k$ tel que N_λ est isomorphe à M pour $\lambda \in U$.

3) Soit d le vecteur dimension de N_λ, $\lambda \in k$. Pourquoi ce vecteur ne dépend-il pas de λ ?

4) Soit $R(Q, d)$ l'espace des représentations de vecteur dimension d. Montrer que dans $R(Q, d)$ l'orbite de N se trouve dans l'adhérence de celle de M.

III. Construction de composantes du carquois d'Auslander-Reiten

Soit A l'algèbre donnée par le carquois



soumis à la relation $\alpha\gamma = 0$.

1) Montrer que A admet une infinité de classes d'isomorphisme de modules indécomposables.

2) Exhiber un système de représentants des modules projectifs indécomposables et des modules injectifs indécomposables. Déterminer leurs vecteurs dimension. Montrer que A admet un unique module projectif simple et un unique module injectif simple (à isomorphisme près).

3) Déterminer les radicaux des projectifs indécomposables et les socles des injectifs indécomposables.

4) Construire la composante du carquois d'Auslander-Reiten qui contient le module projectif simple. Observer qu'elle contient tous les projectifs indécomposables.

5) Construire la composante du carquois d'Auslander-Reiten qui contient le module injectif simple. Observer qu'elle ne contient pas tous les indécomposables injectifs.