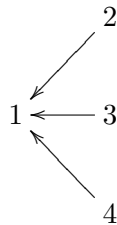


Examen de septembre 2005

Avertissement : L'utilisation de documents autres que les notes de cours est interdite. Dans tout l'énoncé, sauf mention expresse du contraire, k désigne un corps algébriquement clos et les modules considérés sont de dimension finie sur k .

I. Représentations de \vec{D}_4

Soit Q le carquois de graphe sous-jacent D_4



- 1) Quelles sont (à isomorphisme près) les représentations projectives indécomposables et les représentations injectives indécomposables de Q ? Quelles sont les représentations simples ?
- 2) Soit V une représentation *projective* de Q dont le vecteur dimension est $v = [4, 1, 1, 1]$. Quelle peut être la décomposition de V en indécomposables ?
- 3) Déterminer les vecteurs dimension des représentations indécomposables de Q et son carquois d'Auslander-Reiten.
- 4) Rappeler la formule d'Auslander-Reiten pour l'espace des extensions $\text{Ext}_A^1(L, M)$ entre deux modules indécomposables L, M de dimension finie sur une k -algèbre A de dimension finie, où L n'est pas projectif.
- 5) Pour $1 \leq i \leq 4$, on note P_i (respectivement I_i) la représentation indécomposable projective (respectivement injective) associée au sommet i . Montrer que $\text{Ext}_{kQ}^1(I_1, P_1)$ est un plan (=espace vectoriel de dimension 2) et exhiber trois droites remarquables dans ce plan.
- 6) Pour $1 \leq i \leq 4$, notons $J_i = \tau I_i$ le translaté d'Auslander-Reiten. Montrer qu'à isomorphie près, les seules modules qui apparaissent au milieu d'une suite exacte

$$\varepsilon : 0 \rightarrow P_1 \rightarrow E \rightarrow I_1 \rightarrow 0$$

sont $P_1 \oplus I_1$, $P_i \oplus J_i$, $2 \leq i \leq 4$ et J_1 .

- 7) Déterminer, pour chaque $\varepsilon \in \text{Ext}^1(I_1, P_1)$ la classe d'isomorphisme du terme du milieu $E = E(\varepsilon)$ de la suite exacte associée à ε .

- 8) En supposant que k est un corps fini à q éléments, déterminer, pour chacun des modules M du numéro précédent, le nombre de classes ε telles que M soit isomorphe à $E(\varepsilon)$.

II. Dénominateurs des variables d'amas

Soit Q un carquois sans cycles orientés dont l'ensemble des sommets Q_0 est $\{1, \dots, n\}$. Rappelons que la forme d'Euler de Q est définie par

$$\langle e, f \rangle = \sum_{i \in Q_0} e_i f_i - \sum_{\alpha \in Q_1} e_{s(\alpha)} f_{t(\alpha)}, \quad e, f \in \mathbf{Z}^n.$$

On note S_i, P_i, I_i les représentations simple, projective indécomposable et injective indécomposable associées à un sommet i .

- 1) Calculer $\langle \underline{\dim} P_i, \underline{\dim} S_j \rangle$ et $\langle \underline{\dim} S_j, \underline{\dim} I_i \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$.
- 2) Montrer que les vecteurs dimension des projectifs indécomposables de Q forment une \mathbf{Z} -base de \mathbf{Z}^n et qu'il en est de même pour les vecteurs dimension des injectifs indécomposables.
- 3) Soit $\tau : \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}^n$ l'unique automorphisme tel que

$$\tau(\underline{\dim} P_i) = -\underline{\dim} I_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Montrer que pour $e, f \in \mathbf{Z}^n$, on a

$$\langle e, f \rangle = -\langle f, \tau(e) \rangle.$$

- 4) Posons $\alpha_i = \underline{\dim} S_i$. Soit M une représentation indécomposable et $d = \underline{\dim} M$. Rappelons la formule de Caldero-Chapoton pour la variable d'amas associée à M

$$CC(M) = \sum_{0 \leq e \leq d} \chi(Gr_e(M)) \prod_{i=1}^n x_i^{\langle \alpha_i, \tau(e) + e - d \rangle}.$$

Montrer que

$$\langle \alpha_i, \tau(e) + e - d \rangle = -\langle e, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, d - e \rangle.$$

- 5) Montrer que

$$\langle \alpha_i, \tau(e) + e - d \rangle = -d_i + \sum_{\varphi \in Q_1} (d_{t(\varphi)} - e_{t(\varphi)}) - \sum_{\varphi \in Q_1} e_{s(\varphi)}.$$

- 6) Montrer que dans l'écriture sous forme de fraction réduite de $CC(M)$, le dénominateur est égal à

$$\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}.$$