Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques
B. Keller

Année universitaire 2004–05
Représentations de carquois
05/09/2005

Examen de septembre 2005

Avertissement : L'utilisation de documents autres que les notes de cours est interdite. Dans tout l'énoncé, sauf mention expresse du contraire, k désigne un corps algébriquement clos et les modules considérés sont de dimension finie sur k.

I. Représentations de $\vec{D}_4$

Soit Q le carquois de graphe sous-jacent D_4

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl] \\ 1 & 3 \arrow[l] \\ & 4 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

1) Quelles sont (à isomorphisme près) les représentations projectives indécomposables et les représentations injectives indécomposables de Q ? Quelles sont les représentations simples ?
2) Soit V une représentation *projective* de Q dont le vecteur dimension est $v = [4, 1, 1, 1]$. Quelle peut être la décomposition de V en indécomposables ?
3) Déterminer les vecteurs dimension des représentations indécomposables de Q et son carquois d'Auslander-Reiten.
4) Rappeler la formule d'Auslander-Reiten pour l'espace des extensions $\mathrm{Ext}^1_A(L, M)$ entre deux modules indécomposables L, M de dimension finie sur une k-algèbre A de dimension finie, où L n'est pas projectif.
5) Pour $1 \leq i \leq 4$, on note P_i (respectivement I_i) la représentation indécomposable projective (respectivement injective) associée au sommet i. Montrer que $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(I_1, P_1)$ est un plan (=espace vectoriel de dimension 2) et exhiber trois droites remarquables dans ce plan.
6) Pour $1 \leq i \leq 4$, notons $J_i = \tau I_i$ le translaté d'Auslander-Reiten. Montrer qu'à isomorphie près, les seules modules qui apparaissent au milieu d'une suite exacte

$$\varepsilon : 0 \to P_1 \to E \to I_1 \to 0$$

sont $P_1 \oplus I_1$, $P_i \oplus J_i$, $2 \leq i \leq 4$ et J_1.

7) Déterminer, pour chaque $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1(I_1, P_1)$ la classe d'isomorphisme du terme du milieu $E = E(\varepsilon)$ de la suite exacte associée à ε.

8) En supposant que k est un corps fini à q éléments, déterminer, pour chacun des modules M du numéro précédent, le nombre de classes ε telles que M soit isomorphe à $E(\varepsilon)$.

II. Dénominateurs des variables d'amas

Soit Q un carquois sans cycles orientés dont l'ensemble des sommets Q_0 est $\{1, \ldots, n\}$. Rappelons que la forme d'Euler de Q est définie par

$$\langle e, f \rangle = \sum_{i \in Q_0} e_i f_i - \sum_{\alpha \in Q_1} e_{s(\alpha)} f_{t(\alpha)} \ , \ e, f \in \mathbf{Z}^n.$$

On note S_i, P_i, I_i les représentations simple, projective indécomposable et injective indécomposable associées à un sommet i.

1) Calculer $\langle \underline{\dim}\, P_i, \underline{\dim}\, S_j \rangle$ et $\langle \underline{\dim}\, S_j, \underline{\dim}\, I_i \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$.
2) Montrer que les vecteurs dimension des projectifs indécomposables de Q forment une $\mathbf{Z}$-base de $\mathbf{Z}^n$ et qu'il en est de même pour les vecteurs dimension des injectifs indécomposables.
3) Soit $\tau : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^n$ l'unique automorphisme tel que

$$\tau(\underline{\dim}\, P_i) = -\underline{\dim}\, I_i \ , \ 1 \leq i \leq n.$$

   Montrer que pour $e, f \in \mathbf{Z}^n$, on a

$$\langle e, f \rangle = -\langle f, \tau(e) \rangle.$$

4) Posons $\alpha_i = \underline{\dim}\, S_i$. Soit M une représentation indécomposable et $d = \underline{\dim}\, M$. Rappelons la formule de Caldero-Chapoton pour la variable d'amas associée à M

$$CC(M) = \sum_{0 \leq e \leq d} \chi(Gr_e(M)) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\langle \alpha_i, \tau(e) + e - d \rangle}.$$

   Montrer que

$$\langle \alpha_i, \tau(e) + e - d \rangle = -\langle e, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, d - e \rangle.$$

5) Montrer que

$$\langle \alpha_i, \tau(e) + e - d \rangle = -d_i + \sum_{\varphi \in Q_1} (d_{t(\varphi)} - e_{t(\varphi)}) - \sum_{\varphi \in Q_1} e_{s(\varphi)}.$$

6) Montrer que dans l'écriture sous forme de fraction réduite de $CC(M)$, le dénominateur est égal à

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i}.$$