Connections sur les fibrés stables

Olivier Mathieu
(Institut Girard Desarges, UMR 5028, Lyon)

Soit X une surface de Riemmann, i.e. une 2-variété compacte de genre g munie d'une structure complexe. Un fibré holomorphe E est dit stable si $c_1(E) = 0$ mais $c_1(F) < 0$ pour tout sous-fibré propre F, où le symbole $c_1(F)$ désigne la première classe de Chern. Le sens de "$c_1(F) < 0$" est expliqué par l'identification de $H^2(X)$ avec l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers. Ici "stable" veut dire "stable de pente 0".

Narasimhan et Seshadri ont montré que tout fibré stable E admet une unique connection holomorphe et hermitienne **[NS1]**[**NS2**].

Changeons les hypothèses en supposant maintenant que X soit une courbe projective de genre g définie sur un corps de nombres K. Dans ce cadre algébrique, la notion de stabilité est definie de manière analogue en utilisant le degré au lieu de la classe de Chern. Soit E un fibré stable. Alors le théorème précédent attache à toute place infinie de K une certaine connection sur le fibré $E(\mathbf{C})$ au dessus de $X(\mathbf{C})$. Ici une place infinie est vue comme un plongement de K dans $\mathbf{C}$.

Nous montrons un énoncé similaire aux places finies. Puis nous énoncons une conjecture sur l'algébricité des solutions de certaines équations différentielles.

[**M**]: O. Mathieu: Connections on stable bundles, preprint
[**NS1**]: M.S. Narasimhan and C.S. Seshadri: Holomorphic vector bundles on a compact Riemann surface, Math. Ann. 155 (1964), 69–80.
[**NS2**]: M.S. Narasimhan and C.S. Seshadri: Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. of Math. 82 (1965), 540–567.