Exemple d'un groupe de Lie non-linéaire

Soit H le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Soit Γ son sous-groupe formé des matrices où $x = y = 0$ et $z \in \mathbb{Z}$. Alors Γ est fermé dans H et, muni de la topologie induite par H, il est discret. En outre, il est inclus dans le centre de H, qui est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , z \in \mathbb{R}.$$

En particulier, il est distingué. Le groupe de Lie quotient $G = H/\Gamma$

$$G = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & \overline{z} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \ \ , \overline{z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \}$$

est isomorphe, en tant que variété, au produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$ et la projection $H \to H/\Gamma$ s'identifie à la projection canonique $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$. Cette projection est donc un difféomorphisme local au voisinage de tout point de G. En particulier, elle induit un isomorphisme de $\mathsf{Lie}\,(H)$ sur $\mathsf{Lie}\,(G)$.

PROPOSITION. *Il n'existe pas de morphisme injectif du groupe de Lie G dans un groupe $GL(n, \mathbb{C})$, $n \geq 1$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Supposons que $f : G \to GL(n, \mathbb{C})$ est un morphisme injectif. Alors il induit une application linéaire $\mathsf{Lie}\,(f) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Montrons que $\mathsf{Lie}\,(f)$ est injective[1]. En effet, si le noyau de $\mathsf{Lie}\,(f)$ était non nul, tout voisinage de 0 contiendrait un élément non nul dont l'image par $\mathsf{Lie}\,(f)$ est nulle. Or dans un voisinage de e, l'exponentielle est un difféomorphisme local. On obiendrait donc des éléments non triviaux de G, dont l'image par f vaudrait e, en vertu de la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & GL(n, \mathbb{C}) \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\mathsf{Lie}\, f]{} & \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}). \end{array}$$

Etudions l'image de $\mathsf{Lie}\,(f)$. Posons

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces trois éléments forment une base de $\mathfrak{g}$ et nous avons

$$[X, Z] = [Y, Z] = 0 \ \ , [X, Y] = Z.$$

Notons A, B et C les images de ces trois éléments par $\mathsf{Lie}\,(f)$. Ce sont trois matrices 3×3 à coefficients complexes qui vérifient les mêmes relations de commutation que

[1] Nous verrons plus tard que le noyau $\ker f$ est un groupe de Lie et que $\mathsf{Lie}\,(\ker f) = \ker(\mathsf{Lie}\,(f))$.

X, Y et Z. Grâce au lemme 1 ci-dessous, la matrice C est nilpotente. Donc la restriction de l'exponentielle à la droite $\mathbb{R} \cdot C$ est bijective, grâce au lemme 2. Il s'ensuit que la composition $\exp \circ \mathsf{Lie}\,(f)$ restreinte à la droite $\mathbb{R} \cdot Z$ est injective. Par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & GL(n,\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle \exp_G}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\mathsf{Lie}\, f]{} & \mathfrak{gl}\,(n,\mathbb{C}), \end{array}$$

cette composition est égale à $f \circ \exp_G$. Donc la restriction de $\exp_H$ à la droite $\mathbb{R} \cdot C$ est injective. Mais on calcule que

$$\exp(tZ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overline{t} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $tZ \mapsto \exp(tZ)$ envoie tous les multiples entiers de Z sur la matrice identité. Cette contradiction montre que f ne peut être injective. $\surd$

LEMME 1. *Soient A, B, C trois matrices $n \times n$ à coefficients dans un corps k de caractéristique nulle et telles que*

$$[A,B] = C, \quad [A,C] = 0, \quad [B,C] = 0.$$

Alors la matrice C est nilpotente.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que k est algébriquement clos. Il suffit de montrer que toutes les valeurs propres de C sont nulles. Soit λ une valeur propre de C et $V_\lambda \subset k^n$ l'espace propre correspondant. Comme A et B commutent avec C, l'espace propre V_λ est invariant sous A et B. Notons A', B' et C' les restrictions à la source et au but des trois applications A, B et C à V_λ. L'application $[A', B']$ est de trace nulle (puisque c'est un commutateur). Elle est égale à C', c'est-à-dire à la multiplication par λ dans V_λ. En prenant la trace des deux côtés de l'équation $[A', B'] = C'$, nous obtenons que $0 = \lambda \,\mathsf{dim}\, V_\lambda$. Comme V_λ est un espace propre, sa dimension est non nulle et on a bien $\lambda = 0$. $\surd$

LEMME 2. *L'exponentielle* $\exp : \mathfrak{gl}\,(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$ *induit une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur celui des matrices unipotentes (i.e. des matrices g telles que $g-1$ est nilpotente). La bijection inverse est donnée par*

$$g \mapsto \log(1+(g-1)) = (g-1) - \frac{1}{2}(g-1)^2 + \ldots .$$

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est bien unipotente. De l'autre côté, si g est une matrice unipotente quelconque, la série $\log(1+(g-1))$ se réduit à un polynôme en $(g-1)$ sans coefficient constant de façon que $\log(1+(g-1))$ est une matrice bien définie et nilpotente. Le fait que l'exponentielle et la série donnent des applications inverses l'une de l'autre résulte alors des égalités de séries formelles

$$T = \log(1+(e^T-1)) \quad \text{et} \quad T = \exp(\log(1+T)) - 1.$$

$\surd$