Sous-groupes à un paramètre continus

PROPOSITION. *Soit G un groupe de Lie et $\gamma : \mathbb{R} \to G$ un homomorphisme continu. Alors γ est différentiable (et il est donc un sous-groupe à un paramètre).*

Nous donnons deux démonstrations. La première utilise uniquement les propriétés élémentaires de l'exponentielle. La deuxième, plus abstraite, utilise les propriété élémentaires de l'exponentielle et le théorème de von Neumann.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $U \subset \mathfrak{g}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que l'exponentielle induit un difféomorphisme de U sur un voisinage ouvert $V \subset G$ de e. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0 et tel que $\gamma(I)$ est contenu dans V. Définissons $\varphi : I \to G$ par l'égalité

$$\exp(\varphi(t)) = \gamma(t).$$

Nous allons montrer que, dans un voisinage de 0, l'application φ est linéaire. Soit $0 < t$ un point de I et soit $n > 0$ un entier. Je dis que

$$\varphi(t/n) = \frac{1}{n}\,\varphi(t). \tag{1}$$

En effet, nous avons

$$\exp(n\varphi(t/n)) = \exp(\varphi(t/n))^n = \gamma(t/n)^n = \gamma(t) = \exp(\varphi(t)).$$

Ici la première égalité vaut parce que $s \mapsto \exp(s\varphi(t/n))$ est un homomorphisme, la deuxième résulte de la définition de φ, la troisième du fait que γ est un homomorphisme et la quatrième de la définition de φ. Il résulte de (1) que nous avons aussi

$$\varphi(nt') = n\varphi(t')$$

si $n > 0$ est un entier et $0 < t'$ un point de I tel que nt' appartient à I. Soit $t_0 > 0$ un point de I. Nous déduisons des deux égalités précédentes que nous avons

$$\varphi(st_0) = s\varphi(t_0)$$

pour tous les nombres rationnels $0 \leq s \leq 1$. Par la continuïté de φ, il s'ensuit que la même égalité vaut pour tout s dans l'intervalle $[0, 1]$. Il existe donc un $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\varphi(u) = uX$ pour tout $u \in [0, t_0]$. Ainsi, nous avons $\gamma(u) = \exp(uX)$ pour $u \in [0, t_0]$. Comme $\mathbb{R}$ est engendré par $[0, t_0]$, nous avons $\gamma(u) = \exp(uX)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. $\checkmark$

DEUXIÈME DÉMONSTRATION. Considérons le graphe $H \subset \mathbb{R} \times G$ de γ. Comme γ est un homomorphisme, H est un sous-groupe. Comme γ est continu, il est fermé. Donc c'est une sous-variété, d'après le théorème de von Neumann. En particulier, son inclusion $H \to \mathbb{R} \times G$ est un morphisme de variétés. En la composant avec la projection $\mathsf{pr}_1 : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}$ nous obtenons l'application $p : H \to \mathbb{R}$, $(t, \gamma(t)) \to t$, qui est donc différentiable. Par ailleurs, elle est bijective. Le fait que l'exponentielle soit un difféomorphisme local nous permet de conclure que p est un isomorphisme. Nous déduisons que γ est différentiable en tant que composition des applications différentiables

$$\mathbb{R} \xrightarrow{p^{-1}} H \to \mathbb{R} \times G \xrightarrow{\mathsf{pr}_2} G.$$

$\checkmark$