Sous-groupes de Lie

Théorème. *Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie. Soit $H \subset G$ le sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{h})$. Il existe une structure de groupe de Lie connexe sur H et une seule telle que l'inclusion $H \hookrightarrow G$ soit une immersion qui induit un isomorphisme de $\mathsf{Lie}(H)$ sur $\mathfrak{h}$.*

On peut montrer[1] que la structure de groupe de Lie sur H est même déterminée de façon unique si on demande seulement que l'inclusion de H dans G soit un morphisme de groupes de Lie; il *s'ensuit* alors que ce morphisme est une immersion et qu'il induit un isomorphisme de $\mathsf{Lie}(H)$ sur $\mathfrak{h}$.

On appelle *sous-groupe de Lie* un sous-groupe H de G muni d'une structure de groupe de Lie telle que l'inclusion de H dans G soit une immersion.

Démonstration. Montrons l'unicité. Supposons que H_1 et H_2 sont deux structures qui conviennent. Nous avons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r] & G & H_2 \arrow[l] \\ \mathsf{Lie}(H_1) \arrow[u, "\exp_{H_1}"] \arrow[r, "\sim"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp_G"] & \mathsf{Lie}(H_2). \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, "\exp_{H_2}"'] \end{tikzcd}$$

Les applications $\exp_{H_1}$ et $\exp_{H_2}$ sont des difféomorphismes locaux au voisinage de 0. L'application identique de H_1 dans H_2 est donc un difféomorphisme local au voisinage de e. Comme l'identité est un homomorphisme, il s'ensuit qu'elle est un difféomorphisme local au voisinage de tout point.

Montrons l'existence. Rappelons que si $f : M \to N$ est une immersion, alors la structure différentiable de M est déterminée par celle de N, par f et par la topologie de M. Il s'agit donc de construire une topologie sur H (topologie qui, bien entendu, fera de H un groupe topologique).

Pour cela, nous allons choisir un voisinage ouvert assez petit T de 0 dans $\mathfrak{g}$ et montrer qu'il existe alors une (unique) topologie $\mathcal{T}$ de groupe topologique sur H telle que, comme il se doit, la partie $\exp(T \cap \mathfrak{h})$ soit un ouvert pour $\mathcal{T}$ et l'application $X \mapsto \exp(X)$ soit un homéomorphisme de $T \cap \mathfrak{h}$ sur $\exp(T \cap \mathfrak{h})$. Dans un voisinage de e, l'inclusion $H \hookrightarrow G$ s'identifiera alors à l'inclusion de $T \cap \mathfrak{h}$ dans T

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "\mathsf{incl}"] & G \\ T \cap \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r] & T. \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

[1]Voir R. Godement, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, Publications de l'université Paris VII, Volume II, §6, No. 13.

Au voisinage de e, la structure locale de l'inclusion $H \hookrightarrow G$ est donc celle de l'inclusion d'un sous-espace vectoriel. Comme l'inclusion est un homomorphisme, sa structure locale au voisinage d'un point $h \in H$ quelconque est la même que sa structure locale au voisinage de l'élément neutre. Ainsi l'espace H admettra bien une unique structure différentiable telle que l'inclusion devienne une immersion.

Construisons le voisinage T : soit $V \subset \mathfrak{g}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que l'exponentielle induit un difféomorphisme de V sur $\exp(V)$. Soit $U \subset V$ un voisinage de 0 qui est ouvert, étoilé et symétrique et tel que $\exp(U)\exp(U) \subset \exp(V)$. Ces conditions garantissent que pour X, Y appartenant à U, nous avons

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(H(X,Y)) \tag{1}$$

pour un $H(X,Y) \in V$ donné par la formule de Campbell-Hausdorff. Comme la formule ne fait intervenir que des commutateurs, nous aurons alors $H(X,Y) \in V \cap \mathfrak{h}$ pour $X, Y \in U \cap \mathfrak{h}$. Choisissons finalement $T \subset U$ un voisinage ouvert symétrique de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp(T)\exp(T) \subset \exp(U)$.

Montrons qu'il existe une unique topologie de groupe topologique $\mathcal{T}$ sur H telle que $\exp(T \cap \mathfrak{h})$ soit ouvert et que l'application $X \mapsto \exp(X)$ soit un homéomorphisme de $T \cap \mathfrak{h}$ sur $\exp(T \cap \mathfrak{h})$.

L'unicité est claire: les parties $h\exp(W)$, où $h \in H$ et W parcourt les ouverts de H contenus dans $T \cap \mathfrak{h}$, doivent former une base d'ouverts d'une telle topologie.

Montrons l'existence. Les ouverts de la topologie $\mathcal{T}$ seront les parties E telles que, pour tout $h \in E$, il existe un ouvert W de $T \cap \mathfrak{h}$ et un $h' \in H$ tels que

$$h \in h'\exp(W) \subset E.$$

Appelons provisoirement *préouverte*[2] une telle partie. Clairement, toute réunion de préouverts est préouverte. Pour montrer que l'intersection de deux préouverts est préouverte, il suffit de montrer que $h\exp(W) \cap h'\exp(W')$ est préouvert si $h, h' \in H$ et W, W' sont des ouverts de $T \cap \mathfrak{h}$. Comme tout translaté à gauche d'un préouvert est préouvert, on peut supposer que $h' = e$. Nous allons montrer que

$$h\exp(W) \cap \exp(W') = \exp(W'') \tag{2}$$

pour un ouvert W'' de $T \cap \mathfrak{h}$. Nous pouvons supposer que l'intersection à gauche est non vide. Il existe alors $A \in W$ et $B \in W'$ tels que $h\exp(A) = \exp(B)$. Nous

[2] Autre possibilité : on appelle préouvertes les parties E telles que pour tout $h \in E$, il existe un voisinage ouvert W de 0 dans $T \cap \mathfrak{h}$ tel que $h\exp(W)$ soit contenu dans E. Alors il est trivial de vérifier que les préouverts sont les ouverts d'une topologie $\mathcal{T}$ mais on doit travailler plus pour montrer que $\exp(T \cap \mathfrak{h})$ est ouvert pour cette topologie et que exp induit un homéomorphisme de $T \cap \mathfrak{h}$ sur son image.

avons donc

$$h = \exp(B)\exp(-A) = \exp(C)$$

pour un $C \in U$, par définition de U. Il s'ensuit que

$$h\exp(W) = \exp(C)\exp(W) = \exp(H(C, W)).$$

La partie $H(C, W)$ est est contenue dans $V \cap \mathfrak{h}$ (voir plus haut) et c'est un ouvert de $V \cap \mathfrak{h}$ car l'application $H(C, ?) : T \to V$ est un homéomorphisme sur son image, comme il résulte du carré commutatif suivant, avatar de la formule (1),

$$\begin{tikzcd}
\exp(T) \arrow[r, "L_{\exp(C)}"] & \exp(V) \\
T \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "H(C,?)"'] & V. \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

En utilisant à nouveau la bijectivité de l'exponentielle $\exp : V \to \exp(V)$, nous trouvons finalement

$$h\exp(W) \cap \exp(W') = \exp(H(C, W)) \cap \exp(W') = \exp(H(C, W) \cap W').$$

La partie $W'' = H(C, W) \cap W'$ est l'ouvert recherché dans (2).

Munissons H de la topologie $\mathcal{T}$ dont les ouverts sont les préouverts. Il est alors clair que les translations à gauche par les $h \in H$ sont des homéomorphismes, que $\exp(T \cap \mathfrak{h})$ est un ouvert de H et que l'exponentielle $\exp : T \cap \mathfrak{h} \to \exp(T \cap \mathfrak{h})$ est ouverte.

Montrons que l'exponentielle $\exp : T \cap \mathfrak{h} \to \exp(T \cap \mathfrak{h})$ est continue. Il suffit de montrer que l'image réciproque de la trace sur $\exp(T \cap \mathfrak{h})$ d'un ouvert $h\exp(W)$ est ouverte. Ceci résulte de (2) appliqué à $W' = T \cap \mathfrak{h}$.

Montrons que H est un groupe topologique pour $\mathcal{T}$. Nous nous servons du lemme ci-dessous. Nous savons déjà que la condition 2) est vérifiée. Soit $S \subset T$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp(S)\exp(S) \subset \exp(T)$. Considérons la multiplication

$$\exp(S \cap \mathfrak{h}) \times \exp(S \cap \mathfrak{h}) \to \exp(T \cap \mathfrak{h}).$$

La topologie de G et la topologie $\mathcal{T}$ induisent la même topologie sur $\exp(S \cap \mathfrak{h})$ et $\exp(T \cap \mathfrak{h})$ puisque nous avons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\exp", "\text{homéo}"'] & \exp(T) \\
T \cap \mathfrak{h} \arrow[u, hook, "\text{sous-esp. top.}"] \arrow[r, "\text{homéo}", "\exp"'] & (\exp(T \cap \mathfrak{h}), \mathcal{T}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

La condition 1) en découle. Un argument analogue donne la condition 3). Vérifions la condition 4). Considérons d'abord $h = \exp(X)$, où $X \in \mathfrak{h}$. Nous avons alors

$$h\exp(Y)h^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}\,(h)Y) = \exp(e^{\mathrm{ad}\,X}Y).$$

pour tout $Y \in T \cap \mathfrak{h}$. La continuité de la conjugaison par h en e résulte donc de celle de $e^{\mathrm{ad}\,X}$ et du fait que l'exponentielle est un homéomorphisme au voisinage de $0 \in T \cap \mathfrak{h}$. La continuité pour $h \in H$ quelconque en découle car H est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$ par hypothèse.

Par construction de la topologie $\mathcal{T}$, le groupe topologique H admet bien une structure différentiable telle que l'inclusion $H \hookrightarrow G$ soit une immersion. Montrons que pour cette structure, le groupe topologique H est un groupe de Lie. En effet, le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ G \times G \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

montre que la composition de la multiplication de H avec l'immersion $H \hookrightarrow G$ est un morphisme de variétés. La multiplication de H est donc un morphisme de variétés. De même, l'inversion de H est un morphisme de variétés car sa composition avec l'inclusion $H \subset G$ en est un. $\surd$

Lemme. *Soit H un groupe muni d'une topologie. Alors H est un groupe topologique si les propriétés suivantes sont vérifiées*

1) *l'application $(h, h') \mapsto h\,h'$ est continue en (e, e),*
2) *pour tout $h \in H$, la translation à gauche par h est continue,*
3) *l'application $h \mapsto h^{-1}$ est continue en e,*
4) *pour tout $h \in H$, la conjugaison par h qui à x associe hxh^{-1} est continue en e.*

DÉMONSTRATION. Pour montrer que la multiplication $(h, h') \mapsto h\,h'$ est continue en (h_1, h_2), nous écrivons la multiplication comme composition :

$$hh' = h_1(h_1^{-1}h)\,h_2(h_2^{-1}h') = h_1h_2\,(h_2^{-1}(h_1^{-1}h)\,h_2)(h_2^{-1}h')$$

De même pour l'inversion

$$h^{-1} = (h_1h_1^{-1}h)^{-1} = (h_1^{-1}h)^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-1}(h_1(h_1^{-1}h)^{-1}h_1^{-1}).$$

$\surd$