Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 1999-2000
Groupes et Algèbres de Lie
28/01/2000

Un corrigé de l'examen de Janvier 2000

I. Décomposition polaire et applications

1) a) L'application $A \mapsto A^*$ est un endomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de $M(n, \mathbf{C})$. L'ensemble $\mathfrak{p}$ de ses points fixes est donc un sous-espace vectoriel réel. On sait qu'une matrice hermitienne est définie positive ssi ses mineurs principaux sont strictement positifs. Comme les mineurs sont des fonctions polynomiales en les coefficients de la matrice, ce sont des fonctions continues sur $\mathfrak{p}$. La partie $\mathfrak{p}^+$ est donc ouverte en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

b) Une matrice diagonale appartient à $\mathfrak{p}^+$ ssi ses coefficients diagonaux sont des réels strictement positifs. Clairement, elle est alors de la forme e^A pour une matrice diagonale A à coefficients réels. Si $B \in \mathfrak{p}^+$ est quelconque, il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs D telles que $B = UDU^{-1}$. On a alors $D = e^A$ pour une matrice diagonale à coefficients réels A et $B = U\, e^A U^{-1} = e^{UAU^{-1}}$. Comme UAU^{-1} est encore hermitienne, la matrice B appartient bien à l'image de φ.

c) Pour une matrice X, notons $E(X, \lambda)$ l'espace propre de X pour la valeur propre λ. Soit A une matrice hermitienne. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. Alors les valeurs propres de e^A sont $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_r}$. Comme l'exponentielle réelle est injective, elles sont encore distinctes. En particulier, les espaces propres $E(e^A, e^{\lambda_i})$ sont en somme directe et les inclusions
$$E(A, \lambda_i) \subset E(e^A, e^{\lambda_i})$$
sont des égalités. Ainsi, la matrice e^A détermine les espaces propres de A. Dans l'espace propre $E(e^A, e^{\lambda_i})$, la matrice A agit par la multiplication par λ_i (par l'injectivité de l'exponentielle réelle). Donc la matrice e^A détermine A.

d) On sait que la différentielle de l'application exponentielle
$$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C}) \, , \; A \mapsto e^A \, ,$$
au point A est donnée par
$$X \mapsto \frac{e^{\mathrm{ad}A} - 1}{\mathrm{ad}A} \, (X\, e^A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (\mathrm{ad}A)^k \, (X\, e^A).$$
Elle est bijective ssi la matrice
$$\frac{e^{\mathrm{ad}A} - 1}{\mathrm{ad}A}$$
est inversible. Or les valeurs propres de cette matrice sont les
$$\frac{e^z - 1}{z}$$
où z parcours les valeurs propres de $\mathrm{ad}A$. Ainsi la différentielle est non inversible ssi $\mathrm{ad}A$ admet une valeur propre multiple entier non nul de $2\pi i$. Or les valeurs propres de $\mathrm{ad}A$ sont les différences des valeurs propres de A. Ce sont donc des réels. Ainsi la différentielle de l'exponentielle est bijective en tout point $A \in \mathfrak{p}$. La différentielle de l'application $\varphi : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^+$ au point A est la restriction de la différentielle de l'exponentielle. Elle est donc injective. Comme $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^+$ sont de même dimension, elle est en fait bijective.

e) On sait que l'application φ est continue. D'après b) et c), elle est bijective. Grâce à d), elle est ouverte et son application inverse est différentiable. Donc l'application φ est un difféomorphisme.

2) a) Clairement U est un sous-groupe de $GL(n,\mathbf{C})$. Considérons l'application

$$GL(n,\mathbf{C}) \to \mathfrak{p}\,,\ X \mapsto X^* X.$$

Elle est polynomiale et donc continue. Le sous-groupe U est l'image réciproque de $\{1\}$. Donc U est fermé. D'après le théorème de von Neumann, U est une sous-variété de $GL(n,\mathbf{C})$. Comme U est un sous-groupe fermé, son algèbre de Lie est formée des matrices $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$ telles que $\exp(tX)$ appartient à U pour tout $t \in \mathbf{R}$. Or si nous avons

$$1 = \exp(tX)^* \ \exp(tX) = \exp(tX^*) \ \exp(tX)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$, alors, en prenant la différentielle en $t = 0$, nous trouvons que $X^* + X = 0$. Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, alors X^* et X commutent et nous avons

$$\exp(tX^*)\exp(tX) = \exp(tX^* + tX) = 1.$$

Donc l'algèbre de Lie de U est bien formée des matrices antihermitiennes.

b) Supposons que $g = k\exp(X)$, $X \in \mathfrak{p}$, $k \in U$. Alors nous avons

$$g^*g = \exp(X)^*\, k^*k\exp(X) = \exp(X^*)\exp(X) = \exp(2X).$$

Soit maintenant $g \in GL(n,\mathbf{C})$ quelconque. Alors g^*g est une matrice hermitienne définie positive. D'après 1), il existe donc un unique $X \in \mathfrak{p}$ tel que $g^*g = \exp(2X)$. En outre, d'après 1) toujours, l'application $g \mapsto X$ est différentiable. Notons que $\exp(-X)$ commute à $g^*g = \exp(2X)$. Donc si nous posons $k = g\exp(-X)$, nous avons

$$k^*k = \exp(-X)g^*g\exp(-X) = \exp(-2X)g^*g = 1.$$

Donc k est bien unitaire. En outre, l'application $g \mapsto k$ est clairement différentiable. Finalement, nous obtenons une application différentiable

$$G \to U \times \mathfrak{p}\,,\ g \mapsto (k, X).$$

Par construction, elle est inverse de ψ.

c) Soit $K \subset G$ un sous-groupe contenant U strictement. Alors, d'après b), K contient un élément $g = k\exp(X)$, où X est non nul. L'élément $\exp(X) = k^{-1}g$ appartient encore à K. Donc le sous-groupe $\exp(\mathbf{Z}X)$ engendré par cet élément est contenu K. Or l'image de ce sous-groupe par la composition

$$G \stackrel{\psi^{-1}}{\to} U \times \mathfrak{p} \stackrel{p_2}{\to} \mathfrak{p}$$

n'est pas contenue dans un compact (car elle est non bornée). Donc K ne peut être compact.

3) a) L'application $X \mapsto X^*$ est linéaire et donc égale à sa différentielle. Ainsi, nous avons $\mathfrak{g}_1^* = T_e(*)(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_1$. L'égalité en résulte pour des raisons de dimension.

L'application $X \mapsto X^*$ est un automorphisme linéaire de $\mathfrak{g}_1$. Il est d'ordre 2. Donc $\mathfrak{g}_1$ est la somme directe de ses sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1. Ces sous-espaces ne sont autres que $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{u}_1$. D'où la décomposition $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$.

b) Le sous-groupe $U \cap G_1$ est compact en tant que partie fermée du compact U. Son algèbre de Lie est formée des $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$ tels que $\exp(tX)$ appartient à $U \cap G_1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. C'est le cas ssi $\exp(tX)$ appartient à U et à G_1 pour tout $t \in \mathbf{R}$. Cette condition est équivalente au fait que X appartienne à $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{u}_1$.

c) La composante neutre de $U \cap G_1$ a la même algèbre de Lie que $U \cap G_1$, à savoir $\mathfrak{u}_1$. En outre elle est connexe. Par la correspondance bijective entre sous-groupes de Lie connexes et sous-algèbres de Lie, la composante neutre de $U \cap G_1$ est égale à K_1^0. Elle est compacte car c'est une partie fermée du groupe compact $U \cap G_1$.

d) La partie $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$ est fermée en tant que sous-espace. En outre, la partie $K_1^0 \subset U$ est fermée. Donc le produit $K_1^0 \times \mathfrak{p}_1$ est fermé dans $K_1 \times \mathfrak{p}$. Ainsi son image par le difféomorphisme $\psi : U \times \mathfrak{p} \to G$ est fermée. Donc $\psi_1(K_1^0 \times \mathfrak{p}_1)$ est fermé dans G et dans sa partie fermée G_1.

e) L'application ψ_1 est une restriction à la source et au but de l'application ψ de 2 b). Par 2 b), sa différentielle est donc injective en tout point. Or d'après a), les espaces tangents à $K_1^0 \times \mathfrak{p}_1$ et G_1 ont même dimension (en tout point). Donc la différentielle de ψ_1 est bijective partout. Il s'ensuit que ψ_1 est un difféomorphisme local. En particulier, ψ_1 est une application ouverte.

f) L'application ψ_1 est injective en tant que restriction de l'application bijective ψ. Son image est fermée (d'après d) et ouverte (d'après e) dans l'espace connexe G_1^0. Donc ψ_1 est bijective. D'après e), son inverse est différentiable. Donc ψ_1 est un difféomorphisme.

g) Soit $L \subset G_1^0$ un sous-groupe qui contient strictement K_1^0. Alors par f), il contient un élément $k\exp(X)$, où $k \in K_1^0$ et $X \in \mathfrak{p}_1$. Donc il contient $\exp(X)$ et $\exp(\mathbf{Z}X)$. L'image de $\exp(\mathbf{Z}X)$ par la composition

$$G_1^0 \xrightarrow{\psi_1^{-1}} K_1^0 \times \mathfrak{p}_1 \xrightarrow{p_1} \mathfrak{p}_1$$

n'est pas contenue dans un compact. Donc L n'est pas compact. Il s'ensuit que $K_1^0 \subset G_1$ est un sous-groupe compact maximal. Il est contenu dans le sous-groupe compact $U \cap G_1^0$. Donc il lui est égal.

4) a) Clairement, si X appartient à $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{g}_1$, alors $\exp(2X)$ appartient à G_1. Supposons réciproquement que $\exp(2X)$ appartient à G_1. Il existe une matrice unitaire A telle que AXA^* est diagonale. Le groupe $G_2 = AG_1A^{-1}$ est encore algébrique et stable par $X \mapsto X^*$. La matrice AXA^* appartient à $\mathfrak{p}$ et $\exp(AXA^*)$ à G_2. Si on montre que AXA^* appartient à $\mathfrak{p}_2 = A\mathfrak{g}_1A^* \cap \mathfrak{p} = A\mathfrak{p}_1A^*$, il s'ensuivra que X appartient à $\mathfrak{p}_1$. Quitte à remplacer G_1 par G_2, on peut donc supposer que X est diagonale. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coefficients diagonaux. Le fait que $\exp(2X)^k$, $k \in \mathbf{Z}$, appartienne à G_1 s'exprime alors par des conditions $P_\lambda(e^{2kx_1}, \ldots, e^{2kx_n}) = 0$ pour une famille de polynômes à coefficients réels P_λ, $\lambda \in \Lambda$. Soit P l'un des polynômes de la famille. Pour $t \in \mathbf{R}$, on a

$$P(e^{2tx_1}, \ldots, e^{2tx_n}) = \sum a_i\, e^{t\sum b_{ij}x_j}$$

pour certains coefficients réels a_i et b_{ij}. Ici, on peut supposer les $d_i = \sum b_{ij}x_j$ distincts deux à deux (quitte à regrouper des termes). Or on sait que les fonctions

$$\mathbf{Z} \to \mathbf{R}\,,\ k \mapsto e^{kd_i}$$

sont alors linéairement indépendantes (Van der Monde). Donc les coefficients a_i s'annulent et l'on a

$$P(e^{2tx_1}, \ldots, e^{2tx_n}) = 0$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. On conclut que $\exp(tX)$ appartient à G_1 pour tout $t \in \mathbf{R}$ et donc que X appartient à $\mathfrak{p}_1$.

b) L'application $\psi_2 : K_1 \times \mathfrak{p}_1 \to G_1$ se restreint en $\psi_1 : K_1^0 \times \mathfrak{p}_1 \to G_1^0$. Pour $k_1 \in K_1$, on a

$$\psi_2(k_1k, X) = k_1\psi_2(k, X)$$

pour tous les $k \in K_1$, $X \in \mathfrak{p}_1$. Il s'ensuit que ψ_2 induit un difféomorphisme de chaque composante connexe de $K_1 \times \mathfrak{p}_1$ sur son image. Il reste à voir que ψ_2 est surjective. Or si g appartient à G_1, il s'écrit $g = k\exp(X)$ pour un $k \in U$ et un $X \in \mathfrak{p}$. En outre, on a $\exp(2X) = g^*\, g \in G_1$. D'après a), il s'ensuit que X appartient à $\mathfrak{p}_1$ et donc $k = g\exp(-X)$ à $G_1 \cap U = K_1$. Ainsi, ψ_2 est bien surjective.

II. Représentations de $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$

1) a) Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbf{C}$ la forme linéaire qui envoie une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur λ_i. Le système de racines est formée des

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \ , \ i \neq j.$$

L'espace $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ a pour base la matrice E_{ij}.

b) Pour $\alpha = \alpha_{ij}$, on a $H_\alpha = E_{ii} - E_{jj}$ et on pose $X_\alpha = E_{ij}$ et $Y_\alpha = E_{ji}$.

2) Pour $v \in V_\chi$ et $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$HX_\alpha v = [H, X_\alpha]v + X_\alpha Hv = \alpha(H)X_\alpha v + X_\alpha \chi(H)v = (\alpha + \chi)(H)\, X_\alpha v$$

ce qui montre que $X_\alpha v$ appartient bien à l'espace $V_{\chi+\alpha}$.

3) Il est à noter qu'on peut montrer l'affirmation principale plus rapidement en utilisant le fait que la représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,(V)$ préserve la décomposition de Jordan : la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est abélienne et formée d'éléments semisimples, donc $\rho(\mathfrak{h})$ est abélienne et formée d'éléments semisimples. Donc les opérateurs de $\rho(\mathfrak{h})$ sont simultanément diagonalisables. Ceci est équivalent au fait que V soit la somme directe des espaces de poids.

a) Soit $\{\chi_1, \ldots, \chi_M\}$ l'ensemble des formes χ telles que $V_\chi \neq 0$. Pour $i \neq j$, l'espace des $H \in \mathfrak{h}$ tels que $\chi_i(H) = \chi_j(H)$ est un hyperplan de $\mathfrak{h}$. Ces hyperplans sont en nombre fini et il existe donc $H_0 \in \mathfrak{h}$ en dehors de leur réunion. Alors pour chaque χ_i, l'espace V_{χ_i} coïncide avec l'espace propre de l'opérateur $V' \to V', v \mapsto H_0 v$ pour la valeur propre $\chi_i(H_0)$. Comme les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, la somme $V' = \sum_{\chi \in \mathfrak{h}^*} V_\chi$ est bien directe.

b) Par définition, chaque espace V_χ est stable sous $\mathfrak{h}$. Grâce à 2), la somme des V_χ est stable sous $\mathfrak{g}_\alpha$ pour tout $\alpha \in R$. Comme $\mathfrak{g}$ est la somme de $\mathfrak{h}$ et des $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in R$, il s'ensuit que la somme des V_χ est un $\mathfrak{g}$-sous-module de V.

c) Comme l'algèbre $\mathfrak{g}$ est semisimple et V est un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, le théorème de Weyl nous fournit l'existence d'un sous-module V'' supplémentaire de V'.

d) L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est abélienne donc en particulier résoluble. Par le théorème de Lie, il existe donc une droite $\mathfrak{h}$-stable dans V'', si V'' est non nul. Cette droite est engendrée par un vecteur propre pour $\mathfrak{h}$. Or, par définition de V', tout vecteur propre pour $\mathfrak{h}$ appartient à V'. Cette contradiction montre que V'' s'annule. Donc $V = V'$ est la somme directe des espaces V_χ, d'après a).

4) Si $V = \mathbf{C}^n$, les poids sont les formes

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$$

de 1 a). On a $V_{\varepsilon_i} = \mathbf{C}e_i$ et tous les poids sont de multiplicité un. Si $V = \mathfrak{g}$ est la représentation adjointe, la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}$$

montre que les poids non nuls sont les racines. Ils sont tous de multiplicité un. Le poids 0 est de multiplicité égale à la dimension de $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire $n - 1$.

5) a) Il est clair que (ii) implique (i) car $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. Réciproquement, supposons la droite $\mathbf{C}v$ stable par $\mathfrak{b}$. Alors $\mathbf{C}v$ est un $\mathfrak{b}$-module de dimension 1 et tout commutateur de $\mathfrak{b}$ y agit par 0. Comme nous avons $\mathfrak{n}_+ = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$, les X_α, $\alpha \in R^+$, agissent par 0 dans $\mathbf{C}v$. Il est clair que v est un vecteur propre pour $\mathfrak{h}$.

b) Soit W un $\mathfrak{g}$-module non nul. Par restriction, W devient un $\mathfrak{b}$-module non nul de dimension finie. Comme $\mathfrak{b}$ est résoluble, le théorème de Lie fournit alors une droite $\mathfrak{b}$-stable dans W, et donc un vecteur primitif, d'après a).

6) a) Supposons que $Z = X + Y$ où $X \in \mathfrak{b}$ et $Y \in \mathfrak{n}_-$. On procède par récurrence sur k. Si $u \in \mathbf{C}v$, on a bien $Zu = Xu + Yu \in \mathbf{C}v + V^1 \subset V^1$. Supposons que $u \in V^k$, $k > 0$. Alors u est somme d'un vecteur dans V^{k-1} et d'un vecteur $Y'w$, où $Y' \in \mathfrak{n}_-$ et $w \in V^{k-1}$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que $u = Y'w$. Nous avons

$$Zu = (X + Y)Y'w = YY'w + XY'w.$$

Comme $w \in V^{k-1}$, nous avons $YY'w \in V^{k+1}$ et il suffit de montrer que $XY'w \in V^{k+1}$. Or nous avons

$$XY'w = [X, Y']w + Y'Xw.$$

Par l'hypothèse de récurrence, les vecteurs $[X, Y']w$ et Xw appartiennent à V^k. Donc $XY'w$ appartient bien à V^{k+1}.

Il s'ensuit que la réunion des V^k est stable par $\mathfrak{g}$. Comme elle contient v, elle contient V'. Mais réciproquement, par récurrence sur k, chaque V^k appartient à V'. Donc V' est égal à la réunion des V^k.

b) Il s'ensuit de a) que pour $k \geq 1$, V^k est engendré sur $\mathbf{C}$ par les vecteurs de V^{k-1} et les vecteurs $Y_1 \dots Y_k v$, $Y_i \in \mathfrak{n}_-$. Comme $\mathfrak{n}_-$ est engendré sur $\mathbf{C}$ par les Y_α, $\alpha \in R^+$, il s'ensuit que tout vecteur $Y_1 \dots Y_k v$ est combinaison linéaire de vecteurs $Y_{\alpha_1} \dots Y_{\alpha_k} v$. L'affirmation en découle par récurrence sur k.

c) Les vecteurs non nuls parmi les

$$u = Y_{\alpha_1} \dots Y_{\alpha_k} v \,,$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ est une suite de racines positives, sont des vecteurs propres pour $\mathfrak{h}$ et forment une famille génératrice de V'. Nous en extrayons une base pour obtenir une base de vecteurs propres pour $\mathfrak{h}$. Les poids de V' sont alors les poids des vecteurs de la base. D'après 2), ces poids sont bien de la forme

$$\chi - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

d) D'après 3 a), le vecteur v n'appartient pas au sous-espace engendré par les $V'_{\chi'}$, où $\chi' \neq \chi$. Il appartient donc à la base construite dans c) et c'est le seul vecteur propre de poids χ appartenant à la base. Ainsi V'_χ est bien de dimension un.

e) Soit U un sous-module de V'. Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple et V' de dimension finie, le théorème de Weyl nous fournit un sous-module $W \subset V'$ supplémentaire de U. Nous avons $V'_\chi = U_\chi \oplus W_\chi$. Or l'espace V'_χ est de dimension un. Donc il est contenu dans U_χ ou W_χ. Comme il engendre V', on a $V' = U$ ou $V' = W$.

7) Comme V est irréductible, il est engendré par tout vecteur non nul. Donc v' appartient au sous-module engendré par v et , d'après 6 c), nous avons

$$\chi' = \chi - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

pour une suite de racines positives α_i. De même, nous avons

$$\chi = \chi' - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j$$

pour une suite de racines positives α_j. Donc

$$\chi = \chi - (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j)$$

ce qui montre que $k = l = 0$ et que $\chi = \chi'$. Par 6 d), il s'ensuit que v et v' sont proportionnels.

8) a) Clairement le vecteur (v, w) est stable par $\mathfrak{h}$ et annulé par tous les X_α, $\alpha \in R^+$. C'est donc un vecteur primitif et le sous-module U qu'il engendre est irréductible d'après 6 e).

b) La restriction de la projection $V \oplus W \to V$ à U envoie (v, w) sur v. Elle est donc non nulle. Comme U et V sont irréductibles, cette restriction est un isomorphisme. Le même argument montre que la restriction de la projection sur W induit un isomorphisme de U sur W. On obtient donc des isomorphismes

$$V \xleftarrow{\sim} U \xrightarrow{\sim} W$$

et V est bien isomorphe à W.

9) a) On a un isomorphisme canonique de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ sur $\mathfrak{s}_\alpha$ qui envoie X sur X_α, H sur H_α et Y sur Y_α. Ainsi, on peut considérer V comme un $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$-module. Si v est un vecteur primitif du $\mathfrak{g}$-module V, il est encore un vecteur primitif du $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$-module V, car il est vecteur propre de H_α et annulé par X_α. Or on sait que le poids d'un vecteur primitif d'un $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$-module est un entier positif. Ainsi $\chi(H_\alpha)$ est un entier positif.

b) Supposons que

$$\chi = u_1 \varepsilon_1 + \cdots + u_n \varepsilon_n.$$

Nous avons alors $\chi(H_{\alpha_{ij}}) = u_i - u_j$. La racine α_{ij} est positive ssi $i < j$. Il s'ensuit que χ est dominant ssi les différences $u_i - u_j$, $i < j$, sont des entiers positifs. Comme nous avons

$$u_i - u_j = (u_i - u_{i+1}) + (u_{i+1} - u_{i+2}) + \cdots + (u_{j-1} - u_j) ,$$

il revient au même de demander que les différences $u_i - u_{i+1}$ soient des entiers positifs.

c) Clairement les π_i sont dominants. Donc toute combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des π_i est dominante. Réciproquement, si

$$\chi = u_1 \varepsilon_1 + \cdots + u_n \varepsilon_n ,$$

est dominant, alors

$$\chi = (u_1 - u_2)\pi_1 + (u_2 - u_3)\pi_2 + \cdots + (u_{n-1} - u_n)\pi_{n-1}$$

est bien une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des π_i.

d) Soit $v = e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$. Si $i < j$, alors $X_{\alpha_{ij}} = E_{ij}$ envoie v sur 0 si $j > k$ et sur

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_{j-1} \wedge e_i \wedge e_{j+1} \wedge \ldots e_k$$

si $j \leq k$. Ce vecteur s'annule puisque e_i figure parmi $e_1, \ldots e_{j-1}$. Donc $X_\alpha v = 0$ pour toute racine positive α. Clairement v est un vecteur propre pour $\mathfrak{h}$ de poids $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k = \pi_k$. D'après 6 e), pour conclure que $\Lambda^k V$ est irréductible, il suffit de montrer qu'il est engendré par v. Or si $1 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_k \leq n$, nous avons

$$e_{m_1} \wedge e_{m_2} \wedge \ldots \wedge e_{m_k} = E_{m_1,1} E_{m_2,2} E_{m_{k-1},k-1} E_{m_k,k}\, v.$$

e) Le vecteur $v \otimes v'$ de $V \otimes V'$ est primitif de poids $\chi + \chi'$. D'après 6 e), il engendre un sous-module irréductible de plus haut poids $\chi + \chi'$ de $V \otimes V'$.

f) Soit $P \subset \mathfrak{h}$ l'ensemble des formes qui apparaissent comme le plus haut poids d'une représentation irréductible. Alors P contient les π_i d'après d) et il est stable par sommes grâce à e). D'après c), la forme χ appartient à P.