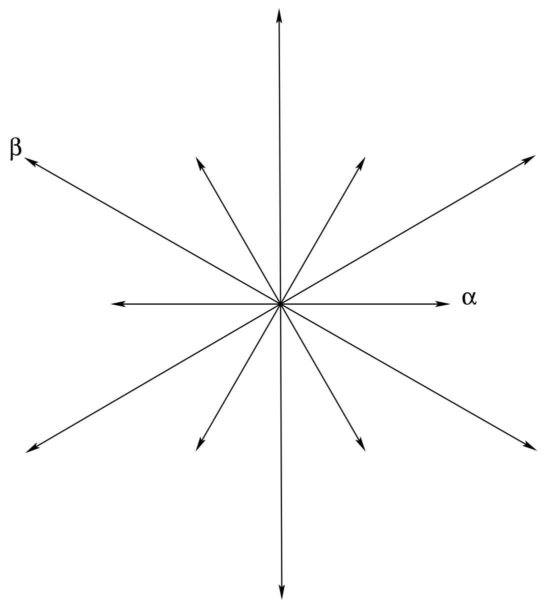
Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 2000-2001
Groupes et Algèbres de Lie
26/01/2001

Un corrigé de l'examen de Janvier 2001

I. Un exercice sur l'algèbre de Lie simple de type G_2

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On suppose que le système de racines associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est le le système G_2 ci-dessous.



1) Quels sont le rang et la dimension de $\mathfrak{g}$? Justifier.

Nous avons

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

La dimension de $\mathfrak{h}$ est égale à 2 (égale au rang du système de racines) et la dimension de $\mathfrak{g}^{\alpha}$ vaut 1 pour toutes les racines. Comme le nombre de racines est 12, la dimension de $\mathfrak{g}$ est 14.

2) Soit $0 \neq X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$. Montrer que $\mathrm{ad}X_{\alpha}$ est nilpotent et calculer son indice de nilpotence (i.e. le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $(\mathrm{ad}X_{\alpha})^n = 0$).

Rappelons que $[\mathfrak{g}^{\lambda}, \mathfrak{g}^{\mu}] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$ quels que soient $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Comme $\alpha \neq 0$, l'espace $\mathfrak{g}^{\lambda+n\alpha}$ s'annule sauf pour un nombre fini de $n \in \mathbf{N}$. Donc l'opérateur $\mathrm{ad}X_{\alpha}$ est bien nilpotent.

Comme le montre le dessin du système, si $\lambda = 0$ ou $\lambda \in R$, alors $\mathfrak{g}^{\lambda+4\alpha} = 0$. Donc X_{α} est d'indice de nilpotence ≤ 4. De l'autre côté, on sait que si λ, μ et $\lambda + \mu$ sont des racines, alors $[\mathfrak{g}^{\lambda}, \mathfrak{g}^{\mu}] = \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$. Ainsi, les espaces $(\mathrm{ad}X_{\alpha})(\mathfrak{g}^{\beta})$, $(\mathrm{ad}X_{\alpha})^2(\mathfrak{g}^{\beta})$ et $(\mathrm{ad}X_{\alpha})^3(\mathfrak{g}^{\beta})$ sont non nuls et X_{α} est d'indice de nilpotence ≥ 4.

Donc $\mathrm{ad}X_{\alpha}$ est d'indice de nilpotence 4.

3) Soit $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ la racine inverse de α. Rappeler la définition de la racine inverse. Soit Y_α un élément de $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $(X_\alpha, H_\alpha, Y_\alpha)$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. Quelle liberté a-t-on dans le choix de Y_α ?

Soit s_α l'unique symétrie telle que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ et $s_\alpha(R) \subset R$. Par définition, la racine inverse α^* est l'unique vecteur dans $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{**}$ tel que

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \alpha^*, \lambda \rangle \, \alpha \, , \; \forall \, \lambda \in \mathfrak{h}^* .$$

L'élément Y_α est unique. En effet, on sait que $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ est de dimension 1. Si l'on a un autre élément Y'_α, il est donc égal à $x\, Y_\alpha$ pour un $x \in \mathbf{C}$. L'égalité $[X_\alpha, Y'_\alpha] = H_\alpha$ implique que $x = 1$.

4) On considère la représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ donnée par le $\mathfrak{sl}_2$-triplet d'endomorphismes de $\mathfrak{g}$

$$(\mathrm{ad}X_\alpha, \mathrm{ad}H_\alpha, \mathrm{ad}Y_\alpha).$$

Quelle est la décomposition de cette représentation en représentations irréductibles ?

L'examen du dessin de G_2 révèle les sous-modules simples suivants :

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{g}^{2\beta+3\alpha} \\
\mathfrak{g}^{\beta} \oplus \mathfrak{g}^{\beta+\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\beta+2\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\beta+3\alpha} \\
\mathfrak{g}^{-\alpha} \oplus \mathbf{C}H_\alpha \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \\
\ker \alpha \\
\mathfrak{g}^{-\beta-3\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\beta-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\beta} \\
\mathfrak{g}^{-2\beta-3\alpha}
\end{array}$$

Leur somme est égale à $\mathfrak{g}$. Ainsi $\mathfrak{g}$ est isomorphe en tant que $\mathfrak{sl}_2$-module à $V_0^3 \oplus V_2 \oplus V_3^2$, où V_i désigne le $\mathfrak{sl}_2$-module simple de dimension $i+1$.

5) En déduire le rang de $(\mathrm{ad}X_\alpha)^2$.

On voit que l'image de $(\mathrm{ad}X_\alpha)^2$ est

$$(\mathfrak{g}^{\beta+2\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\beta+3\alpha}) \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus (\mathfrak{g}^{-\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\beta}).$$

Donc $(\mathrm{ad}X_\alpha)^2$ est de rang 5.

6) Calculer la dimension de l'espace E des endomorphismes linéaires $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ qui commutent à $\mathrm{ad}X_\alpha$ et $\mathrm{ad}Y_\alpha$ et la dimension du sous-espace $D \subset E$ formé des dérivations dans E.

Un endomorphisme qui commute avec X_α et Y_α, commute aussi avec $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$. Donc E est l'espace des endomorphismes du $\mathfrak{sl}_2$-module $\mathfrak{g}$. Donc

$$E \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V_0^3 \oplus V_2 \oplus V_3^2).$$

Par le lemme de Schur, nous avons $\mathrm{Hom}(V_i, V_j) = 0$ si $i \neq j$ et $\mathrm{Hom}(V_i, V_i) = k$. En outre, nous avons

$$\mathrm{Hom}(U, V \oplus W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U, V) \oplus \mathrm{Hom}(U, W)$$

et

$$\mathrm{Hom}(U \oplus V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U, W) \oplus \mathrm{Hom}(V, W)$$

quels que soient les modules U, V, W. Il s'ensuit que

$$\mathrm{End}(V_0^3 \oplus V_2 \oplus V_3^2) \xrightarrow{\sim} M(3, \mathbf{C}) \oplus \mathbf{C} \oplus M(2, \mathbf{C})$$

et que E est de dimension $9+1+4 = 14$. Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, toutes ses dérivations sont intérieures et $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme sur l'algèbre des dérivations. Il s'agit donc de déterminer le centralisateur de X_α dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire le noyau de $\mathrm{ad}X_\alpha$. Chaque facteur simple de la décomposition de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{sl}_2$-modules simples contribue une dimension. Donc D est de dimension 6.

II. Le radical est l'orthogonal de l'algèbre dérivée

On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}(n, \mathbf{C})$ l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(n, \mathbf{C})$ la sous-algèbre des matrices strictement triangulaires supérieures et K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On pose $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}_{i+1} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_i]$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

1) Montrer que $\mathfrak{n}$ est inclus dans le noyau de K. Indication : on pourra se servir du fait que $\mathfrak{n}_i = 0$ pour $i \geq n$.

   On voit par récurrence sur i que $\mathfrak{n}_i$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Donc pour $Y \in \mathfrak{g}$, on a $\mathrm{ad}(Y)(\mathfrak{n}_i) \subset \mathfrak{n}_i$. Pour $X \in \mathfrak{n}$, on a par définition $\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{n}_i) \subset \mathfrak{n}_{i+1}$. Donc pour $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{n}$, on a

$$\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)(\mathfrak{n}_i) \subset \mathfrak{n}_{i+1}\,.$$

   Comme $\mathfrak{n}_i$ s'annule pour $i > n$, l'opérateur $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ est nilpotent et

$$K(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)) = 0.$$

2) Montrer que la forme de Killing est donnée par

$$K(X, Y) = a\,\mathrm{tr}(XY) - b\,\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y)$$

   pour deux entiers a et b que l'on déterminera.

   Comme K est symétrique, il suffit de calculer $K(X, X)$. D'après le point précédent, on peut supposer que X est diagonale. L'opérateur $\mathrm{ad}X$ est alors diagonal par rapport à la base des E_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$. Si les scalaires λ_i, $1 \leq i \leq n$, sont les coefficients diagonaux de X, on a $\mathrm{ad}(X)(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)\,E_{ij}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)^2) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \\
&= n\,(\sum_i \lambda_i^2) - (\sum_i \lambda_i)^2 \\
&= n\,\mathrm{tr}(X^2) - (\mathrm{tr}X)^2.
\end{aligned}$$

   Il s'ensuit que

$$K(X, Y) = n\,\mathrm{tr}(XY) - (\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}Y).$$

3) Montrer que le noyau de K est la somme directe de $\mathfrak{n}$ avec la sous-algèbre des matrices scalaires.

   Notons $\mathfrak{s}$ la sous-algèbre des matrices scalaires et $\mathfrak{t}$ la sous-algèbre des matrices diagonales de trace nulle. Nous avons

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}.$$

   D'après le point précédent, la somme $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{s}$ est contenue dans le noyau de K. De l'autre côté, la restriction de K à la sous-algèbre $\mathfrak{t}$ est non dégénérée. D'où l'égalité.

4) Vérifier que l'orthogonal de l'algèbre de Lie dérivée $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est égal au radical de $\mathfrak{g}$ alors que l'orthogonal du radical est strictement plus grand que la sous-algèbre dérivée.

   L'algèbre dérivée est égale à $\mathfrak{n}$. Comme elle est contenue dans le noyau de K, son orthogonal est $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est résoluble, elle est égale à son radical. D'où l'égalité annoncée.

   L'orthogonal du radical est l'orthogonal de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire le noyau de K. On a vu dans le point précédent qu'il était égal à la somme de l'algèbre dérivée avec la sous-algèbre des matrices scalaires.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Soit $\mathfrak{r}$ son radical et K sa forme de Killing. On se propose de montrer que $\mathfrak{r}$ est l'orthogonal de l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ pour la forme de Killing.

5) Soit $\mathfrak{a}$ l'orthogonal de l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ pour la forme de Killing. Montrer que $\mathfrak{a}$ est un idéal et qu'il est résoluble. En déduire qu'il est contenu dans le radical.

Comme l'algèbre dérivée est un idéal et que la forme de Killing est invariante, l'orthogonal de l'algèbre dérivée est encore un idéal. Montrons que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}$ *est résoluble. En effet,* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}$ *est une algèbre de Lie linéaire et par le critère de Cartan, il suffit de vérifier que*

$$\mathrm{tr}(fg) = 0$$

pour $f \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}$ *et* $g \in [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}]$*. Or pour* $f = \mathrm{ad}X$ *et* $g = [\mathrm{ad}Y, \mathrm{ad}Z] = \mathrm{ad}[Y,Z]$*, nous avons*

$$\mathrm{tr}(fg) = K(X,[Y,Z]) = 0$$

par définition de $\mathfrak{a}$*. Donc* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}$ *est bien résoluble. Il s'ensuit que* $\mathfrak{a}$ *est résoluble, car il est extension de* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}$ *par l'algèbre abélienne* $\mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{g})$*.*

6) On se propose de montrer que réciproquement, le radical $\mathfrak{r}$ est bien orthogonal à l'algèbre dérivée (et donc contenu dans $\mathfrak{a}$).

   a) Soit U un élément de $\mathfrak{g}$. Montrer que l'espace vectoriel $\mathbf{C}U + \mathfrak{r}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$. Montrer ensuite que $\mathrm{ad}[U,Z]$ est nilpotent pour tout $Z \in \mathfrak{r}$.

   Nous avons

$$[\mathbf{C}U + \mathfrak{r}, \mathbf{C}U + \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$$

   car $\mathfrak{r}$ *est un idéal. Tout comme son algèbre dérivée,* $\mathbf{C}U + \mathfrak{r}$ *est donc résoluble. Considérons la représentation*

$$\mathrm{ad} : \mathbf{C}U + \mathfrak{r} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

   D'après le théorème de Lie, il existe un drapeau F *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathrm{ad}(\mathbf{C}U + \mathfrak{r}) \subset \mathfrak{b}(F)$*. Il s'ensuit que* $\mathrm{ad}[U,Z]$ *appartient à* $[\mathfrak{b}(F), \mathfrak{b}(F)] = \mathfrak{n}(F)$ *pour tout* $Z \in \mathfrak{r}$*. En particulier, l'opérateur* $\mathrm{ad}[Z,U]$ *est nilpotent.*

   b) Soient X, Y des éléments de $\mathfrak{g}$ et $Z \in \mathfrak{r}$. Montrer que $\mathfrak{g}$ admet un drapeau F tel que $\mathrm{ad}(X) \subset \mathfrak{b}(F)$ et $\mathrm{ad}[Y,Z] \subset \mathfrak{n}(F)$.

   Considérons la sous-algèbre résoluble $\mathbf{C}X + \mathfrak{r}$*. D'après le théorème de Lie, il existe un drapeau de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathrm{ad}(\mathbf{C}X + \mathfrak{r}) \subset \mathfrak{b}(F)$*. En particulier, nous avons* $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{b}(F)$ *et* $\mathrm{ad}[Y,Z] \in \mathfrak{b}(F)$*. Or d'après le point précédent, l'opérateur* $\mathrm{ad}[Y,Z]$ *est nilpotent. Il appartient donc à* $\mathfrak{n}(F)$*.*

   c) Montrer que $\mathfrak{r}$ est orthogonal à l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et conclure.

   Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ *et* $Z \in \mathfrak{r}$*. Nous avons*

$$K([X,Y],Z) = K(X,[Y,Z]) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}[Y,Z]).$$

   D'aprés le point précédent, il existe un drapeau F *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{b}(F)$ *et* $\mathrm{ad}[Y,Z] \in \mathfrak{n}(F)$*. Donc* $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}[Y,Z]$ *appartient à* $\mathfrak{n}(F)$ *et sa trace s'annule. Il s'ensuit que* $\mathfrak{r}$ *est bien orthogonal à* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *et que* $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}$*. Au paragraphe précédent, on a montré l'inclusion inverse. Donc* $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$*.*

III. Une propriété des tores maximaux dans les groupes compacts

Soit $T \subset U(n)$ le sous-groupe des matrices diagonales unitaires dans $U(n)$. On se propose de calculer le normalisateur $N(T)$ de T dans $U(n)$.

1) Soit $g \in N(T)$. Montrer que g permute les axes de coordonnées $D_1, \ldots, D_n$. En déduire que g est une *matrice monomiale*, c'est-à-dire que chaque colonne et chaque ligne de g contient un coefficient non nul et un seul. Indication : si $t \in T$ est à coefficients diagonaux distincts deux à deux, les D_i sont les espaces propres de t.

Soit $t \in T$ *une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts deux à deux. Alors les droites* D_i *sont les espaces propres de* t*. Par hypothèse, la matrice* gtg^{-1} *est encore diagonale* *et bien sûr ses valeurs propres sont celles de t. Ses espaces propres sont également les droites D_i. De l'autre côté, on sait que les espaces propres de gtg^{-1} sont les images par g des espaces propres de t. Donc g permute les droites D_i.*

Soit σ la permutation telle que $g(D_i) = D_{\sigma(i)}$. Alors la i-ème colonne de g est multiple non nul de $e_{\sigma(i)}$ ce qui entraîne que g est monomiale.

2) Pour $g \in N(T)$, soit $\pi(g)$ la permutation telle que $gD_i = D_{\pi(g)(i)}$. Montrer que l'on a une suite exacte

$$1 \to T \to N(T) \xrightarrow{\pi} S_n \to 1$$

et que $T = N(T)_0$. En déduire que T est un sous-groupe abélien connexe maximal.

Clairement, π est surjective (la permutation σ est l'image de l'application linéaire qui envoie e_i sur $e_{\sigma(i)}$). Son noyau est formé des matrices g telles que $g(D_i) = D_i$ pour tout i. Donc le noyau est égal à T. Comme T est connexe, on a $T \subset N(T)_0$. Comme $N(T)_0$ est connexe et S_n discret, π est constante sur $N(T)_0$ et $N(T)_0$ est contenu dans le noyau de π, c'est-à-dire dans T. Si $T' \supset T$ est un sous-groupe connexe abélien, alors T' est contenu dans $N(T)$ (car T' est abélien) et même dans $N(T)_0$ (car T' est connexe). Or $N(T)_0 = T$ et on a donc $T' = T$.

Soit K un groupe de Lie réel compact. Soit $T \subset K$ un sous-groupe abélien connexe et qui est maximal pour ces propriétés.

3) Montrer que T est fermé. En déduire qu'il est un groupe de Lie connexe, compact abélien. Que peut-on dire de la structure de T ?

Par continuité de la multiplication et du passage à l'inverse, l'adhérence de T est encore un sous-groupe abélien et clairement il est connexe. On conclut par la maximalité de T. On sait alors que l'exponentielle $\exp : \mathrm{Lie}(T) \to T$ *induit un isomorphisme de groupes de Lie* $\mathrm{Lie}(T)/\Gamma \xrightarrow{\sim} T$ *où Γ est un sous-groupe discret du groupe abélien topologique* $\mathrm{Lie}(T)$. *Comme T est compact, Γ est en fait un réseau, c'est-à-dire un sous-groupe engendré sur $\mathbf{Z}$ par une base de l'espace vectoriel* $\mathrm{Lie}(T)$.

4) Montrer que le groupe des automorphismes de groupe de Lie de T s'identifie à un sous-groupe discret Λ de $GL(\mathrm{Lie}(T))$.

On considère l'homomorphisme

$$Aut(T) \to GL(\mathrm{Lie}(T))$$

donné par la différentielle. Il est injectif et son image est formée des automorphismes φ tels que $\varphi(\Gamma) = \Gamma$. Si on choisit une base de Γ, ce dernier groupe s'identifie à $GL(n, \mathbf{Z})$, sous-groupe discret de $GL(n, \mathbf{R})$ identifié à $GL(\mathrm{Lie}(T))$.

5) Soit $N(T)$ le normalisateur de T dans K. Montrer que $N(T)$ est un sous-groupe de Lie fermé de K. Montrer que l'action par conjugaison de $N(T)_0$ dans T est triviale.

Pour tout $t \in T$, l'ensemble N_t des $g \in K$ tels que $gtg^{-1} \in T$ est fermé car l'application $g \mapsto gtg^{-1}$ est continue et T est fermé. Le normalisateur $N(T)$ est fermé car il est l'intersection des N_t, $t \in T$. Par le théorème de von Neumann, $N(T)$ est un sous-groupe de Lie fermé.

L'image de $N(T)_0$ dans le groupe discret Λ est connexe donc réduite à l'élément neutre.

6) Soit $\gamma : \mathbf{R} \to N(T)_0$ un sous-groupe à un paramètre. Montrer que l'ensemble $\gamma(\mathbf{R})T$ est un sous-groupe abélien connexe de K et déduire qu'il est égal à T.

D'après le point précédent, les éléments $\gamma(x)$, $x \in \mathbf{R}$, commutent à tous les éléments de T. Donc $\gamma(\mathbf{R})T$ est bien un sous-groupe et il est bien abélien. Il est connexe car image de $\mathbf{R} \times T$ par l'application continue évidente. Par maximalité de T, il est égal à T.

7) Montrer que $N(T)_0$ est égal à T et déduire que $N(T)/T$ est fini.

Les sous-groupes à un paramètre de $N(T)_0$ couvrent un voisinage de l'élément neutre dans $N(T)_0$. Ils sont contenus dans T. Ce groupe doit ainsi contenir un voisinage de l'élément *neutre dans* $N(T)_0$. *Comme* $N(T)_0$ *est connexe, on a* $N(T)_0 \subset T$. *L'inclusion réciproque est claire. Donc on a bien* $N(T)_0 = T$.

Comme $N(T)$ *est un sous-groupe fermé du groupe compact* K, *il est compact. Donc il n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Comme* $N(T)_0 = T$, *cela signifie que* $N(T)/T$ *est fini.*