Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 1998-1999
Groupes et Algèbres de Lie
25/01/99

Un corrigé de l'examen de Janvier 1999

1) a) Puisque $\mathfrak{a}$ est résoluble, il existe, d'après le théorème de Lie, une forme linéaire λ sur $\mathfrak{a}$ telle que $V_\lambda \neq 0$. D'après le lemme cité dans le sujet, V_λ est un $\mathfrak{g}$-sous-module de V. Puisque V est simple et V_λ est non nul, on doit avoir $V = V_\lambda$ de façon que $X \in \mathfrak{a}$ agit dans V par le scalaire $\lambda(X)\mathbf{1}_V$. Il s'ensuit que si $Y \in \mathfrak{g}$, alors le commutateur $[\rho(X), \rho(Y)] = [\lambda(X)\mathbf{1}_V, \rho(Y)]$ s'annule. Donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ agit bien par 0 dans V.

b) D'après a), tout $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ agit par 0 dans V_i/V_{i-1}. Cela signifie que $XV_i \subset V_{i-1}$.

c) Soit $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ et $Y \in \mathfrak{g}$. Nous avons $\rho(Y)V_i \subset V_i$ et $\rho(X)V_i \subset V_{i-1}$ de façon que $\rho(X)\rho(Y)V_i \subset V_{i-1}$. Il s'ensuit que l'opérateur $\rho(X)\rho(Y)$ est nilpotent et donc $b_V(X, Y) = 0$. Ainsi, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ est bien orthogonal sur $\mathfrak{g}$ par rapport à b_V.

2) a) (i) implique (ii) : La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est semisimple ssi $\mathfrak{g}$ possède la propriété $(*)$

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors il existe un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Montrons que la propriété $(*)$ est encore vraie pour $\mathfrak{a}$. En effet, nous avons $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ pour un autre idéal, et $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$. Il s'ensuit que si $\mathfrak{a}'$ est un idéal de $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}'$ pour un idéal $\mathfrak{b}'$ de $\mathfrak{g}$. Alors la projection le long de $\mathfrak{b}$ induit un isomorphisme $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{b}' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}$. Il s'ensuit qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}''$ de $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{a}''$. Donc $\mathfrak{a}$ hérite bien de la propriété $(*)$. Il s'ensuit que si $\mathfrak{a}$ est indécomposable, alors il n'admet pas d'idéaux propres. Donc soit il est abélien de dimension 1 soit il est simple. Comme $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, il se décompose en une somme finie d'idéaux indécomposables. On prend pour $\mathfrak{a}$ la sous-somme des idéaux abéliens et pour $\mathfrak{s}$ la sous-somme des idéaux simples.

(ii) implique (iii) : Soit $n = \dim \mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{a}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales $n \times n$ et la représentation naturelle des matrices diagonales dans $\mathbf{C}^n$ fournit une représentation V_a de $\mathfrak{a}$. Soit $V_s = \mathfrak{s}$ muni de la représentation adjointe de $\mathfrak{s}$. On pose $V = V_a \oplus V_s$ et on fait agir $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ de la façon naturelle sur V :

$$(A, X).(v_a, v_s) = (Av_a, Xv_s)$$

pour $A \in \mathfrak{a}, X \in \mathfrak{s}, v_a \in V_a, v_s \in V_s$. Alors la forme associée à V est égale à la somme orthogonale d'une forme non dégénérée sur $\mathfrak{a}$ et de la forme de Killing sur $\mathfrak{s}$. Elle est donc non dégénérée.

(iii) implique (iv) : Le centre de $\mathfrak{g}$ est abélien donc résoluble et il est donc contenu dans le radical, qui est le plus grand idéal résoluble. Notons $\mathfrak{r}$ le radical. Alors d'après l'exercice précédent, l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ est orthogonal sur $\mathfrak{g}$ pour toute forme bilinéaire b_V associée à une représentation de dimension finie. Par hypothèse, il existe V telle que b_V est non dégénérée. Donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ s'annule ce qui signifie que $\mathfrak{r}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$.

(iv) implique (i) : Notons ρ la représentation adjointe. Le centre de $\mathfrak{g}$ est le noyau de ρ. Donc si le centre contient le radical $\mathfrak{r}$, alors ρ induit une représentation de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. La représentation ρ est donc semi-simple en tant que représentation de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Mais les sous-espaces invariants par $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ sont exactement les sous-espaces invariants par $\mathfrak{g}$, de façon que ρ est semi-simple en tant que représentation de $\mathfrak{g}$.

b) Pour $X \in \mathfrak{h}$, le centralisateur de X est la somme directe de $\mathfrak{h}$ et des espaces poids $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in R$, tels que $\alpha(X) = 0$.

c) Soit R^+ l'ensemble des racines positives par rapport à une base de R. On sait que la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha})$$

est orthogonale par rapport à la forme de Killing (en fait : par rapport à toute forme invariante). Or $\mathfrak{g}(X)$ est égale à une sous-somme. Il s'sensuit que $\mathfrak{g}$ est la somme orthogonale de $\mathfrak{g}(X)$ et de son orthogonal. Donc la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{g}(X)$ est non dégénérée.

d) Par restriction de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}(X)$, on munit $\mathfrak{g}$ d'une structure de $\mathfrak{g}(X)$-module. La forme bilinéaire associée est la restriction à $\mathfrak{g}(X)$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Nous venons de voir que cette forme est non dégénérée. D'après le point a) (iii) de l'exercice précédent, il s'ensuit que $\mathfrak{g}(X)$ est réductive.

3) a) On a

$$x\, y_1 y_2 = (x, y_1)\, y_1 x\, y_2 = (x, y_1)\, y_1\, (x, y_2)\, y_2 x = (x, y_1)\ {}^{y_1}(x, y_2)\, y_1 y_2 x$$

ce qui montre la première égalité et

$$x_1 x_2 y = x_1\, (x_2, y)\, y x_2 = {}^{x_1}(x_2, y)\, x_1 y x_2 = {}^{x_1}(x_2, y)\, (x_1, y)\, y x_1 x_2$$

ce qui montre la deuxième.

b) Posons

$$x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

et on calcule que

$$(x, y) = \begin{pmatrix} ad^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1}d \end{pmatrix}.$$

Clairement les trois autres types de commutateurs sont triviaux. Le groupe (G, G) est donc le sous-groupe de $GL(2, \mathbf{R})$ formé des matrices

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

c) Soit $\varphi : G \to G$ un automorphisme de G. On a $\varphi((x, y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$ pour tous les $x, y \in G$. Donc $\varphi((G, G)) \subset (G, G)$. Comme φ^{-1} est encore un automorphisme, on a aussi l'inclusion inverse.

Soient $x, y \in G$. L'égalité $xy = (x, y)\, yx$ montre que les images de x et y dans $G/(G, G)$ commutent. Donc $G/(G, G)$ est abélien.

Soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Si G/H est abélien, on a $\pi((x, y)) = (\pi(x), \pi(y)) = e$ pour tous les $x, y \in G$. Donc H contient (G, G).

d) Comme $X = X^{-1}$, le groupe G est égal à l'ensemble des produits $x_1 x_2 \ldots x_n$, $n \in \mathbf{N}$, d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ de X.

Soit L le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $g(x, y)g^{-1}$, $g \in G$, $x, y \in X$. Comme (G, G) est distingué, il contient L. Soit $x \in X$. Montrons que (x, h) appartient à L pour tous les $h \in G$. En effet, comme $X = X^{-1}$, nous avons $h = x_1 \ldots x_n$ pour certains $x_1, \ldots, x_n$ dans X. On procède par récurrence sur n. Par définition, nous avons $(x, x_1) \in L$. Par l'hypothèse de récurrence, si $h_1 = x_1 \ldots x_{n-1}$, nous avons $(x, h_1) \in L$. Il s'ensuit que l'élément $(x, h_1 x_n) = (x, h_1)\ {}^{h_1}(x, x_n)$ appartient à L. Fixons $h \in G$. Un argument analogue (basé sur la seconde formule de a) montre que (g, h) appartient à L pour tout $g \in G$. Donc tous les (g, h), $g, h \in G$, appartiennent à L et (G, G) est contenu dans L.

e) Si G est le sous-groupe de b), la composante neutre de G est formé des matrices diagonales dans G. Elle est donc commutative et $\mathfrak{g}$ est commutatif. Donc $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 0$. De l'autre côté, le calcul de b) montre que $(G,G) \neq e$.

f) Soit U_1 un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que exp est un difféomorphisme de U_1 sur son image et que pour tous $X, Y \in U_1$ on a la formule de Campbell-Hausdorff

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y + R(X,Y))\ ,$$

où $R(X,Y)$ est la somme d'une infinité de crochets itérés de X et Y. En particulier, nous avons $R(X,Y) \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Soit U un voisinage symétrique de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp(U)^3 \subset \exp(U_1)$. Alors pour $X, Y \in U$, nous avons

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y + R_1)\ ,$$

où $R_1 \in \mathfrak{h}$ et $\exp(X + Y + R_1) \in \exp(U)^2$, puis

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = \exp(X + Y + R_1)\exp(-Y) = \exp(X + R_2)\ ,$$

où $R_2 \in \mathfrak{h}$ et $\exp(X + R_2) \in \exp(U)^3$, puis

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X)\exp(-Y) = \exp(X + R_2)\exp(-X) = \exp(Z)\ ,$$

où $Z = R(X + R_2, -X) \in \mathfrak{h}$.

Comme G est connexe, il est engendré par $\exp(U)$. Comme $\exp(U)$ est un voisinage de e qui est symétrique et générateur, le sous-groupe (G,G) est engendré, d'après a), par les éléments

$$g\exp(X)\exp(Y)\exp(-X)\exp(-Y)g^{-1}$$

où $X, Y \in U$ et $g \in G$. Donc il est contenu dans le sous-groupe engendré par les

$$g\exp(Z)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)Z)$$

où $g \in G$ et $Z \in \mathfrak{h}$. Or nous avons $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ puisque $\mathrm{Ad}(g)$ est un automorphisme de G. Il s'ensuit que les $g\exp(Z)g^{-1}$, $Z \in \mathfrak{h}$, $g \in G$, engendrent H et que $(G,G) \subset H$.

g) L'application α_g est la composition des applications

$$G \to G \times G\ ,\ x \mapsto (gxg^{-1}, x) \qquad \text{et} \qquad G \times G \to G\ ,\ (x,y) \mapsto xy^{-1}\ .$$

Leurs différentielles en e resp. (e,e) sont

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}\ ,\ X \mapsto (\mathrm{Ad}(g)X, X) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\ ,\ (X,Y) \mapsto X - Y\ .$$

La différentielle $T_e\alpha_g$ est donc la composition :

$$(T_e\alpha_g)(X) = (\mathrm{Ad}(g) - \mathbf{1})(X).$$

h) Fixons $X \in \mathfrak{g}$. Soit $f : G \to \mathfrak{h}$ l'application $g \mapsto (\mathrm{Ad}(g) - \mathbf{1})(X)$ et soit V le sous-espace de $\mathfrak{h}$ engendré par l'image de f. Clairement V contient l'image de $\mathfrak{g}$ par l'application tangente de f. Or cette application est

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}\ ,\ Y \mapsto \mathrm{ad}(Y)(X).$$

Donc V contient $[\mathfrak{g}, X]$. Il s'ensuit que l'espace engendré par les $(\mathrm{Ad}(g) - \mathbf{1})(X)$, $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, contient $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{h}$.

i) La différentielle de α au point $(e, \ldots, e)$ est donnée par

$$\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}\ ,\ (X_1, \ldots, X_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (T_e\alpha_{g_i})(X_i).$$

En utilisant le point précédent, nous trouvons $g_1, \ldots, g_n$ tels que la somme des images des $T_e\alpha_{g_i}$ soit égale à $\mathfrak{h}$. Ceci signifie que la différentielle de α en $(e, \ldots, e)$ est surjective.

j) Le sous-groupe (G,G) contient l'image de l'application α du point précédent. Puisque α est submersive au point $(e, \ldots, e)$, son image contient un voisinage de e dans H. Comme H est connexe, il est engendré par tout voisinage de e. Donc H est inclus dans (G,G).