Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 1999-2000
Groupes et Algèbres de Lie
13/06/2000

Un corrigé de l'examen de Juin 2000 (deuxième session)

1) a) Soit $g \in G$. Comme g est une rotation, g admet un axe (une droite propre pour la valeur propre 1). Si l'on choisit un générateur de l'axe pour la première colonne de la matrice $h \in G$, on trouve que $hgh^{-1} = \gamma_0(\varphi)$, pour un $\varphi \in \mathbf{R}$, où

$$\gamma_0(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} , \; s \in \mathbf{R}.$$

On définit $\gamma : \mathbf{R} \to G$ par $\gamma(t) = h^{-1}\gamma_0(t\varphi)h$.

b) On sait que tout homomorphisme continu $\gamma : \mathbf{R} \to G$ est de la forme $\gamma(t) = \exp(tX)$, $t \in \mathbf{R}$, pour un $X \in \mathfrak{g}$. On conclut par a).

c) Nous avons

$$[X_1, X_2] = X_3 \, , \; [X_2, X_3] = X_1 \, , \; [X_3, X_1] = X_2.$$

Soit X comme dans l'énoncé. La matrice de $\mathrm{ad}(X)$ par rapport à la base X_1, X_2, X_3 est

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $\lambda(\lambda^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Donc ses valeurs propres sont $0, \pm i\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

d) On sait que l'application exponentielle a une différentielle bijective en un point $X \in \mathfrak{g}$ si et seulement si les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X)$ ne sont pas parmi $2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. D'après c), la différentielle de l'exponentielle est bijective en $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$ si et seulement si

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 4\pi^2k^2$$

quel que soit $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

2) a) Soit $x \in C_G(\mathfrak{h})$ et $y \in N_G(\mathfrak{h})$ et $H \in \mathfrak{h}$. Alors $y^{-1}(H) \in \mathfrak{h}$, donc $xy^{-1}(H) = y^{-1}H$ et $yxy^{-1}(H) = H$. Cela montre que yxy^{-1} appartient à $C_G(\mathfrak{h})$ et que $C_G(\mathfrak{h})$ est bien distingué dans $N_G(\mathfrak{h})$.

Montrons que les deux sont des sous-groupes fermés. Si l'on choisit une base de $\mathfrak{g}$ dont les premiers $\dim \mathfrak{h}$ vecteurs forment une base de $\mathfrak{h}$, l'application $\mathrm{Ad}(g)$, $g \in G$, est donnée par une matrice en blocs

$$\begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ B(g) & D(g) \end{pmatrix}.$$

Les coefficients des quatre matrices dépendent continûment de g. Un élément $g \in G$ appartient à $N_G(\mathfrak{h})$ ssi l'on a $B(g) = 0$ et à $C_G(\mathfrak{h})$ ssi l'on a $B(g) = 0$ et $A(g) = \mathbf{1}$. Ces conditions définissent clairement des fermés.

b) On sait que l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé K de G est l'ensemble des $X \in G$ tels que $\exp(tX)$ appartient à K pour tous $t \in \mathbf{R}$. Nous allons appliquer cette description à $N_G(\mathfrak{h})$ et $C_G(\mathfrak{h})$. Pour $X \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))(H) = e^{\mathrm{ad}(tX)}(H).$$

Cette formule montre que si $\mathrm{ad}(tX)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, alors $\mathrm{Ad}(\exp(tX))(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Réciproquement, si nous avons la dérnière inclusion, nous obtenons la première en calculant la dérivée en $t = 0$ des deux côtés de l'équation ci-dessus.

De même, si $\mathrm{ad}(tX)(\mathfrak{h}) = \{0\}$, la formule nous donne que la restriction de $\mathrm{Ad}(\exp(tX))$ à $\mathfrak{h}$ est l'identité. Et réciproquement, si la restriction est l'identité, en passant à la dérivée en $t = 0$, nous obtenons que $\mathrm{ad}(X)$ s'annule sur $\mathfrak{h}$.

3) a) Il résulte de la définition de $C_G(\mathfrak{h})$ que $C_G(\mathfrak{h})$ est le noyau de l'application φ. Donc φ induit une injection de $N_G(\mathfrak{h})/C_G(\mathfrak{h})$ sur son image. Il reste à montrer que l'image est finie. En effet, pour $g \in N_G(\mathfrak{h})$, l'application $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est un automorphisme qui laisse stable la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Ainsi, l'automorphisme $\mathrm{Ad}(g)$ induit un automorphisme $\psi(g)$ de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. De façon explicite, pour $g \in N_G(\mathfrak{h})$ et $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, nous avons $(\psi(g))(\alpha) = \alpha \circ (\mathrm{Ad}(g))^{-1}$. Ainsi, $\psi(g)$ ne dépend que de $\varphi(g)$ et si $\psi(g)$ est l'identité, alors $\varphi(g)$ est l'identité car les racines engendrent $\mathfrak{h}^*$. L'image de φ s'identifie donc à un sous-groupe des automorphismes de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. En particulier, elle est finie.

b) Supposons que $G = SL(2, \mathbf{C})$ et que X, Y, H est la base canonique de $\mathfrak{g}$. Alors

$$g = \exp(X)\exp(-Y)\exp(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'application $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ est la conjugaison par la dernière matrice. Clairement nous avons $\mathrm{Ad}(g)(H) = -H$ ce qui démontre l'affirmation dans ce cas.

c) Considérons le cas général. Nous avons la décomposition $\mathfrak{h} = \ker\alpha \oplus \mathbf{C}H$. Nous allons montrer que $\mathfrak{h}$ est stable par $\mathrm{Ad}(g)$, et que $\mathrm{Ad}(g)$ induit l'identité sur $\ker\alpha$ et la multiplication par -1 sur $\mathbf{C}H$.

Supposons que H' appartient à $\ker\alpha \subset \mathfrak{h}$. Alors H' est laissé fixe par $\mathrm{Ad}\exp(X)$, $\mathrm{Ad}\exp(-Y)$ et donc par $\mathrm{Ad}(g)$. Donc l'endomorphisme $\mathrm{Ad}(g)$ laisse stable $\ker\alpha \subset \mathfrak{g}$ et y induit l'identité.

Nous allons maintenant montrer que $\mathrm{Ad}(g)$ laisse stable $\mathbf{C}H$ et y induit la multiplication par -1. Comme $SL(2, \mathbf{C})$ est simplement connexe, il existe un morphisme de groupes de Lie $f : SL(2, \mathbf{C}) \to G$ et un seul dont la différentielle df envoie les vecteurs de la base canonique de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ sur les éléments X, Y, H. Notons X_0, Y_0, H_0 les vecteurs de la base canonique de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et $g_0 = \exp(X_0)\exp(-Y_0)\exp(X_0)$. Par la fonctorialité de l'exponentielle, nous avons $g = f(g_0)$. Par la fonctorialité de la représentation adjointe, nous avons

$$\mathrm{Ad}(f(g_0)) \circ (\mathrm{Lie} f) = (\mathrm{Lie} f) \circ \mathrm{Ad}(g_0).$$

Comme $H = (\mathrm{Lie} f)(H_0)$, nous pouvons déduire du cas de $G = SL(2, \mathbf{C})$ que $\mathrm{Ad}(g)(H) = -H$.

d) Par a), l'image de φ est un sous-groupe fini de $GL(\mathfrak{h})$. Par c), ce sous-groupe contient les réflexions associées aux racines. Par définition, ces réflexions engendrent le groupe de Weyl. Donc l'image de φ est bien un sous-groupe fini de $GL(\mathfrak{h})$ contenant le groupe de Weyl.

4) a) Posons $\lambda_0 = 0$. Considérons la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{h}$ est nilpotente donc résoluble. Par le théorème de Lie, il existe une base $X_1, \ldots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ dans laquelle les opérateurs $\mathrm{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{h}$, sont représentés par des matrices triangulaires supérieures. Les coefficients diagonaux de la matrice représentant $\mathrm{ad}(H)$ sont les $\lambda_i(H)$, $0 \leq i$ (écrites autant de fois que l'indiquent leurs multiplicités algébriques). Il s'ensuit que chaque vecteur de base X_i appartient à un et un seul espace $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$, $0 \leq i$. Donc $\mathfrak{g}$ est la somme directe des $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$, $0 \leq i$. Il reste à montrer que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$. Considérons l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{h}$. Si cet espace est non nul, alors d'après le théorème de Lie, il existe un vecteur $X \in \mathfrak{g}^0 \setminus \mathfrak{h}$ dont l'image dans $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{h}$ est un vecteur propre pour tous les opérateurs $\mathrm{ad}H$. La valeur propre correspondante est nulle car $X \in \mathfrak{g}^0$. Nous avons donc $[H, X] \in \mathfrak{h}$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ et X appartient au normalisateur de $\mathfrak{h}$. Ce dernier est égal à $\mathfrak{h}$ par hypothèse. Contradiction.

b) Pour deux formes linéaires λ et μ sur $\mathfrak{h}$, nous avons $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$. Donc $\mathrm{ad}(X)^n(\mathfrak{g}^\mu)$ est contenu dans $\mathfrak{g}^{n\lambda_i+\mu}$. Cet espace s'annule pour tout $n \gg 0$ car nous avons

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{\lambda_n} .$$

c) Soit $X \in \mathfrak{g}^{\lambda_i}$. Alors l'opérateur $\mathrm{ad}(X)$ est nilpotent et

$$\exp(\mathrm{ad}(X)) = \sum_{i=0}^{\dim \mathfrak{g}} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}(X)^i .$$

Donc l'exponentielle $\mathfrak{g}^{\lambda_i} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ est une application polynomiale. On en déduit aussitôt que f est polynomiale.

d) Notons T l'application tangente à f en $(H_0, 0, \ldots, 0)$. Pour $H \in \mathfrak{h}$ et $X \in \mathfrak{g}^{\lambda_1}$, nous avons

$$f(H_0 + H, 0, \ldots, 0) = H_0 + H \text{ et } f(H_0, X, 0, \ldots, 0) = H_0 + [X, H_0] + \frac{1}{2!}[X, [X, H_0]] + \ldots .$$

Donc

$$T(H, 0, \ldots, 0) = H \text{ et } T(0, X, \ldots, 0) = [X, H_0].$$

Il s'ensuit que

$$T(\mathfrak{h} \times 0 \times \ldots \times 0) = \mathfrak{h} \text{ et } T(0 \times \mathfrak{g}^{\lambda_1} \times \ldots \times 0) = \mathfrak{g}^{\lambda_1}$$

car $H_0 \in \mathfrak{h}'$. De même, on voit que

$$T(\mathfrak{h} \times 0 \times 0 \times \mathfrak{g}^{\lambda_2} \times \ldots \times 0) = \mathfrak{g}^{\lambda_2}$$

et ainsi de suite. Ainsi, T est surjective.

e) En effet la restriction de f à $\mathfrak{h}' \times \mathfrak{g}^{\lambda_1} \times \ldots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}$ est submersive en $(H_0, 0, \ldots, 0)$ donc son image contient un voisinage de $f(H_0, 0, \ldots, 0)$.

f) La partie $E\mathfrak{h}'$ contient clairement l'image par f de $\mathfrak{h}' \times \mathfrak{g}^{\lambda_1} \times \ldots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}$. Par e) elle contient une partie dense de $\mathfrak{g}$. La partie $E\mathfrak{k}'$ contient un ouvert non vide de $\mathfrak{g}$ par e). Donc l'intersection $E\mathfrak{h}' \cap E\mathfrak{k}'$ est non vide. Il existe dont $g_1, g_2 \in E$ et $H \in \mathfrak{h}'$, $K \in \mathfrak{k}'$ tels que $g_1 H = g_2 K$. Donc $K = g_2^{-1} g_1 H$. Il s'ensuit que $\mathfrak{k} = g_2^{-1} g_1 \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est le nilespace (=l'espace caractéristique pour la valeur propre 0) de l'opérateur $\mathrm{ad}(H)$ et $\mathfrak{k}$ le nilespace de $\mathrm{ad}(K)$.