Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 2000-2001
Groupes et Algèbres de Lie
09/06/2001

Un corrigé de l'examen de Juin 2001 (2^e session)

I. Trois groupes isomorphes

1) Montrer que

$$SO(3,\mathbf{C}) = \{A \in GL(3,\mathbf{C}) \mid {}^tAA = \mathbf{1} \text{ et } \det A = 1\}$$

est un groupe de Lie et déterminer son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3,\mathbf{C})$.

L'ensemble $SO(3,\mathbf{C})$ est un sous-groupe de $GL(3,\mathbf{C})$ défini par des équations polynomiales. Il est donc un sous-groupe fermé du groupe de Lie $GL(3,\mathbf{C})$. Par le théorème de von Neumann, il est lui-même un groupe de Lie. Son algèbre de Lie est formée des $X \in \mathfrak{gl}(3,\mathbf{C})$ tels que $\exp(tX) \in SO(3,\mathbf{C})$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Nous allons montrer que

$$\mathrm{Lie}(SO(3,\mathbf{C})) = \{X \in \mathfrak{gl}(3,\mathbf{C}) \mid {}^tX + X = 0\}.$$

En effet, si nous avons ${}^tX + X = 0$, alors

$${}^t\exp(tX) = \exp(t\,{}^tX) = \exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$$

et $\exp(tX)$ est donc bien orthogonale. En outre, on a

$$\det(\exp(tX)) = \exp(\mathrm{tr}(tX)) = 1.$$

Réciproquement, si nous prenons la différentielle en $t=0$ des deux côtés de l'équation

$${}^t\exp(tX) = \exp(tX)^{-1},$$

nous trouvons que ${}^tX = -X$.

2) Montrer que l'ensemble $S^1_{\mathbf{C}}$ formé de couples (x,y) de nombres complexes tels que

$$x^2 + y^2 = 1$$

est connexe.

Nous avons $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$. On voit donc que l'application

$$S^1_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}^*,\ (x,y) \mapsto x+iy$$

est un homéomorphisme d'inverse

$$z \mapsto \left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right).$$

L'affirmation en découle car $\mathbf{C}^*$ est connexe.

3) Montrer que l'ensemble E des matrices complexes 2×2 de déterminant nul et de trace non nulle est connexe.

Le polynôme caractéristique d'une telle matrice A est $X^2 - \lambda X$, où $\lambda = \mathrm{tr}(A) \neq 0$. Elle est donc semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble E est donc l'image de $GL(2, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}^*$ par l'application continue

$$(g, \lambda) \mapsto g \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1}.$$

Comme $GL(2, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}^*$ est connexe, l'affirmation en résulte.

4) En déduire que l'ensemble E' des quadruplets (x, y, z, t) de nombres complexes tels que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ et $t \neq 0$ est connexe. Indication : on pourra considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t + iz & ix + y \\ ix - y & t - iz \end{pmatrix}.$$

L'application φ qui, à un quadruplet (x, y, z, t), associe la matrice A est une bijection linéaire de $\mathbf{C}^4$ sur $M(2, \mathbf{C})$. La trace de A vaut $2t$ et son déterminant $t^2 + z^2 + x^2 + y^2$. L'application φ induit donc un homéomorphisme de E' sur l'ensemble E de la question précédente.

5) Montrer que $SO(3, \mathbf{C})/SO(2, \mathbf{C})$ est homéomorphe à la sphère complexe

$$S^2_{\mathbf{C}} = \{v \in \mathbf{C}^3 \, | q(v) = 1\}$$

où $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Indication : on pourra utiliser un théorème bien connu traité en TD.

Considérons l'action naturelle de $SO(3, \mathbf{C})$ sur la sphère complexe. Comme tout vecteur v tel que $q(v) = 1$ se complète en une base orthonormée de $\mathbf{C}^3$, cette action est transitive. Le stabilisateur de e_1 sous cette action est formé des matrices dans $SO(3, \mathbf{C})$ dont le premier vecteur colonne est e_1. Comme le deuxième et le troisième vecteur colonne sont orthogonaux sur le premier, leur premiers coefficients sont nuls. La matrice est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

où le bloc en bas à droite appartient à $SO(2, \mathbf{C})$. Le stabilisateur de e_1 est donc canoniquement isomorphe à $SO(2, \mathbf{C})$, et nous obtenons une bijection

$$SO(3, \mathbf{C})/SO(2, \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} S^2_{\mathbf{C}}.$$

D'après un théorème bien connu traité en TD, pour vérifier qu'il s'agit d'un homéomorphisme, il suffit de montrer que $S^2_{\mathbf{C}}$ est localement compact et $SO(3, \mathbf{C})$

localement compact et dénombrable à l'infini. Or $S^2_{\mathbf{C}}$ est localement compact en tant que fermé de l'espace localement compact $\mathbf{C}^3$. Et $SO(3,\mathbf{C})$ est localement compact et dénombrable à l'infini en tant que fermé de l'espace $M(3,\mathbf{C})$ qui jouit de ces mêmes propriétés.

6) En déduire que $SO(3,\mathbf{C})$ est connexe. Indication : on commencera par établir que le cercle complexe $S^1_{\mathbf{C}}$ et la sphère complexe $S^2_{\mathbf{C}}$ sont connexes.

   On a vu à la question 2) que le cercle $S^1_{\mathbf{C}}$ est connexe. L'application

$$(x,y,z,t) \mapsto (x/t, y/t, z/t)$$

   est une surjection continue de l'ensemble E' de la question 4) sur la sphère complexe $S^2_{\mathbf{C}}$. Elle est donc connexe puisque E' l'est. L'application

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

   est un homéomorphisme de $S^1_{\mathbf{C}}$ sur $SO(2,\mathbf{C})$. Ainsi, $SO(2,\mathbf{C})$ et

$$SO(3,\mathbf{C})/SO(2,\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} S^2_{\mathbf{C}}$$

   sont connexes. D'après un théorème traité en TD, il s'ensuit que $SO(3,\mathbf{C})$ est connexe.

7) Déterminer les composantes connexes de $O(3,\mathbf{C})$.

   Comme $SO(3,\mathbf{C})$ est connexe, il est contenu dans la composante neutre de $O(3,\mathbf{C})$. Comme $O(3,\mathbf{C})/SO(3,\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$ est discret, la composante neutre de $O(3,\mathbf{C})$ contient $SO(3,\mathbf{C})$. Il s'ensuit que les composantes connexes de $O(3,\mathbf{C})$ sont $SO(3,\mathbf{C})$ et $-SO(3,\mathbf{C})$.

8) Montrer que si q est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbf{C}^3$, alors $O(3,\mathbf{C})$ est isomorphe à

$$O(q) = \{A \in GL(3,\mathbf{C}) \mid q(Av) = q(v) \text{ pour tout } v \in \mathbf{C}^3\}.$$

   Indication : Il existe une base orthonormée pour q.

   Soit S une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée pour q. Alors l'application $g \mapsto SgS^{-1}$ est un isomorphisme de $O(3,\mathbf{C})$ sur $O(q)$.

9) Montrer que les groupes de Lie

$$PSL(2,\mathbf{C}) = SL(2,\mathbf{C})/\{\pm \mathbf{1}\}$$

   et $SO(3,\mathbf{C})$ sont isomorphes. Indication : on fera opérer $SL(2,\mathbf{C})$ par congruence sur l'ensemble des matrices symétriques 2×2 par

$$(A,S) \mapsto AS\,{}^tA.$$

   On notera que la forme $q(S) = \det S$ est non dégénérée et invariante par cette action.

L'opération indiquée définit un morphisme de groupes de $SL(2,\mathbf{C})$ vers $O(q)$. Comme $SL(2,\mathbf{C})$ est connexe, son image est contenu dans la composante neutre de $O(q)$. D'après la question 7), cette composante est $SO(q)$. Un calcul facile montre que le noyau de l'homomorphisme $SL(2,\mathbf{C}) \to SO(q)$ ainsi défini est $\{\pm 1\}$. On obtient donc un morphisme injectif de groupes de Lie $\varphi : PSL(2,\mathbf{C}) \to SO(q)$. Ces deux groupes sont connexes et de même dimension. Donc φ est un isomorphisme. Finalement, on a un isomorphisme $SO(q) \xrightarrow{\sim} SO(3,\mathbf{C})$ d'après la question précédente.

10) Montrer que l'exponentielle n'est pas surjective pour $SL(2,\mathbf{C})$ (question de cours) mais qu'elle l'est pour $SO(3,\mathbf{C})$. Indication : ceci revient à démontrer que pour toute matrice $A \in SL(2,\mathbf{C})$, l'une au moins parmi A et $-A$ est une exponentielle.

La matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

n'appartient pas à l'image de l'exponentielle de $SL(2,\mathbf{C})$. En effet, si elle était de la forme $\exp(X)$ pour un $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$, alors les valeurs propres $\lambda, -\lambda$ de X seraient non nulles. Alors elles seraient distinctes et X serait diagonalisable. Mais alors $\exp(X)$ serait diagonalisable. Contradiction.

Pour montrer que A ou $-A$ est une exponentielle, on peut supposer A trigonalisée. Si ses coefficients diagonaux sont distincts deux à deux, A est diagonalisable donc elle est une exponentielle. Si les coefficients diagonaux sont égaux à λ, on a $\lambda^2 = 1$ donc $\lambda = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, alors A est l'exponentielle de $A - \mathbf{1}$. Si $\lambda = -1$, alors $-A$ est l'exponentielle de $-A - \mathbf{1}$.

11) Montrer que $\mathfrak{so}(3,\mathbf{C})$ est une algèbre de Lie simple de rang 1.

La différentielle de l'isomorphisme de la question précédente est un isomorphisme $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3,\mathbf{C})$. Donc $\mathfrak{so}(3,\mathbf{C})$ est bien simple de rang 1.

12) a) Montrer qu'une matrice dans $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ est nilpotente ssi son déterminant s'annule et semisimple sinon. Indication : considérer le polynôme caractéristique.

b) Montrer qu'une matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente ssi $\delta(B) = a^2 + b^2 + c^2$ s'annule et semi-simple sinon.

a) Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ est $X^2 + \det A$. Si $\det A = 0$, alors $A^2 = 0$ (Cayley-Hamilton), sinon elle a deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

b) Le polynôme caractèristique de la matrice indiquée est $X^3 - (a^2 + b^2 + c^2)X$. Si $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, on a $B^3 = 0$ (Cayley-Hamilton), sinon elle a trois valeurs propres distinctes deux à deux et est donc diagonalisable.

13) Expliciter toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$.

On sait que les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ *sont de dimension* 1 *et qu'elles sont formées d'éléments semisimples. Réciproquement, si on a une matrice* A *semi-simple, alors d'après le point précédent, elle a ses valeurs propres distinctes, donc la droite* $\mathbf{C}A$ *est conjugué à la sous-algèbre des matrices diagonales de* $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$*. Il s'ensuit que les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ *sont précisément les droites* $\mathbf{C}A$ *où* A *est une matrice de déterminant non nul.*

De même, on voit que les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ *sont précisément les droites* $\mathbf{C}B$ *où* $\delta(B) \neq 0$*.*

14) Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ formée des matrices

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbf{C}.$$

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathrm{ad}H(\lambda)$ dans $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ et expliciter la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$, $\mathfrak{h} = \mathbf{C}H(1)$. Déterminer l'élément H_α canoniquement associé à $\mathfrak{h}$ et α. Compléter H_α en un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

Considérons

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule que

$$[H(\lambda), X] = -\lambda Y \ , \ [H(\lambda), Y] = \lambda X \ , \ [X, Y] = H(1).$$

La matrice de $\mathrm{ad}H(\lambda)$ *dans la base* $X, Y, H(1)$ *est donc*

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les valeurs propres de $\mathrm{ad}H(\lambda)$ *sont* $i\lambda$*,* 0 *et* $-i\lambda$*. Des vecteurs propres associés sont*

$$X + iY, H(1), X - iY.$$

Pour $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbf{C}$ *on choisit la forme (unique au signe près)*

$$H(\lambda) \mapsto i\lambda.$$

Alors $\mathfrak{g}^{\alpha} = \mathbf{C}(X + iY)$ *et* $\mathfrak{g}^{-\alpha} = \mathbf{C}(X - iY)$*. On a* $H_\alpha = H(2/i)$*. On choisit* $X_\alpha = X + iY$*. On a*

$$[X + iY, X - iY] = -2i[X, Y] = -2iH(1) = H(2/i)$$

et on choisit donc $Y_\alpha = X - iY$*.*

15) Déterminer l'orbite de H_α sous l'action adjointe de $SO(3, \mathbf{C})$.

Nous allons montrer que l'orbite est l'ensemble O des matrices

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

telles que $a^2 + b^2 + c^2 = -4$. En effet, l'ensemble O contient H_α et il est stable par conjugaison (car $a^2+b^2+c^2$ est un coefficient du polynôme caractéristique de B). Donc l'orbite est contenue dans O. Réciproquement, si $B \in O$, alors O est semisimple et régulier d'après la question 12). Donc il est conjugué sous l'action du groupe adjoint à un élément $H(\lambda)$ de $\mathfrak{h}$. On doit avoir $\lambda^2 = \delta(B) = -4$. Donc $\lambda = \pm 2/i$. On conclut en observant que $H(\lambda)$ est conjugué à $H(-\lambda)$ par l'élément de $SO(3, \mathbf{C})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16) Soit $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ la forme quadratique

$$q(x, y, r, s) = x^2 - y^2 - r^2 - s^2,$$

et $O(1, 3)$ le groupe des $g \in GL(4, \mathbf{R})$ tels que $q(gv) = q(v)$ pour tout $v \in \mathbf{R}^4$. Montrer que le groupe de Lie réel $PSL(2, \mathbf{C})$ est isomorphe à la composante connexe de $O(1, 3)$. Indication : faire opérer $SL(2, \mathbf{C})$ par congruence hermitienne sur les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x + y & r - is \\ r + is & x - y \end{pmatrix}$$

L'opération par congruence hermitienne préserve le déterminant, qui vaut $x^2 - y^2 - r^2 - s^2$. On obtient donc bien un homomorphisme de groupe à valeurs dans $O(1, 3)$. On calcule que son noyau est formé de ± 1. On obtient ainsi un morphisme de groupes de Lie injectif $PSL(2, \mathbf{C}) \to O(1, 3)$. Les deux groupes sont de dimension réelle 6. Comme $PSL(2, \mathbf{C})$ est connexe, on obtient un isomorphisme de $PSL(2, \mathbf{C})$ sur la composante neutre de $O(1, 3)$.

II. Automorphismes qui laissent fixe une sous-algèbre de Cartan

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan.

1) Soit $H_0 \in \mathfrak{h}$. Montrer que $\varphi = e^{\mathrm{ad} H_0}$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que $\varphi(H) = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

Comme $\mathrm{ad} H_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une dérivation, son exponentielle est un automorphisme. Pour $H \in \mathfrak{h}$, on a $(\mathrm{ad} H_0)(H) = 0$. Donc $\exp(\mathrm{ad} H_0)$ se restreint à l'identité sur $\mathfrak{h}$.

Réciproquement, soit $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que $\varphi(H) = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$. On se propose de montrer que $H = \exp(\mathrm{ad}H_0)$ pour un $H_0 \in \mathfrak{h}$.

2) Soit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action de $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$. Montrer que $\varphi(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^\alpha$ pour tout $\alpha \in R$.

Soit $X \in \mathfrak{g}^\alpha$. Pour $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$[H, \varphi(X)] = [\varphi(H), \varphi(X)] = \varphi([H, X]) = \alpha(H)\varphi(X).$$

Donc $\varphi(X)$ est encore dans $\mathfrak{g}^\alpha$. Comme φ est un automorphisme, sa restriction à $\mathfrak{g}^\alpha$ est injective et on a $\varphi(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^\alpha$.

3) Pour $\alpha \in R$, soit $c_a \in \mathbf{C}$ tel que $\varphi(X) = c_\alpha X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}^\alpha$. Montrer que $c_{\alpha+\beta} = c_\alpha c_\beta$ et $c_\alpha c_{-\alpha} = 1$ si α, β et $\alpha + \beta$ sont des racines.

Soient X_α et X_β des générateurs de $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^\beta$. On sait qu'alors $[X_\alpha, X_\beta]$ est un générateur de $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. On a

$$c_{\alpha+\beta}[X_\alpha, X_\beta] = \varphi([X_\alpha, X_\beta]) = [\varphi(X_\alpha), \varphi(X_\beta)] = c_\alpha\, c_\beta\, [X_\alpha, X_\beta].$$

D'où la première égalité. Pour la seconde, on choisit un générateur Y_α de $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. On sait alors que $[X_\alpha, Y_\alpha]$ est un élément non nul de $\mathfrak{h}$ et on en déduit que $c_\alpha c_{-\alpha} = 1$.

4) Soit $S \subset R$ une base du système de racines. Montrer que si $c_\alpha = 1$ pour toutes les racines simples, alors φ est l'identité de $\mathfrak{g}$.

Soit β une racine positive. On sait qu'il existe une suite de racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ telle que

$$\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$$

et que chaque somme partielle $\alpha_1 + \ldots + \alpha_h$, $h \leq k$, soit encore une racine. Par récurrence sur h, on déduit du point précédent que $c_\beta = 1$. Comme $c_\beta\, c_{-\beta} = 1$, on a aussi $c_{-\beta} = 1$. Il s'ensuit que φ est l'identité sur $\mathfrak{g}^\beta$ pour toute racine β. Comme φ se restreint aussi à l'identité sur $\mathfrak{h}$, φ est l'identité de $\mathfrak{g}$.

5) Montrer qu'il existe $H_0 \in \mathfrak{h}$ tel que $\exp(\mathrm{ad}H_0)$ et φ coïncident sur $\mathfrak{g}^\alpha$ pour toutes les racines simples. En déduire que $\varphi = \exp(\mathrm{ad}H_0)$.

Pour toute racine simple α soit z_α un nombre complexe tel que $e^{z_\alpha} = c_\alpha$. On sait que les racines simples forment une base sur $\mathbf{C}$ du dual de $\mathfrak{h}$. Il existe donc un élément H_0 dans $\mathfrak{h}$ tel que $\alpha(H_0) = z_\alpha$ pour toute racine simple α. On a alors

$$\exp(\mathrm{ad}H_0)(X_\alpha) = \exp(\alpha(H_0))X_\alpha = c_\alpha X_\alpha.$$

Donc les coefficients c_α associés à $\varphi^{-1} \circ \exp(\mathrm{ad}H_0)$ sont tous égaux à 1. D'après le point précédent, $\varphi^{-1} \circ \exp(\mathrm{ad}H_0)$ est l'identité de $\mathfrak{g}$.