# Un corrigé de l'examen de Juin 1999

1) a) Soit $X \in \mathfrak{h}$. Alors $X$ est de la forme (nous n'écrivons pas les coefficients nuls)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 &&&&& \\ & \lambda_2 &&&& \\ && \lambda_3 &&& \\ &&& -\lambda_3 && \\ &&&& -\lambda_2 & \\ &&&&& -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

et l'action de $X$ sur les matrices $E_{ij}$ est décrite par le tableau suivant

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_2 & 2\lambda_1 \\ & 0 & \lambda_2-\lambda_3 & \lambda_2+\lambda_3 & 2\lambda_2 & \lambda_2+\lambda_1 \\ && 0 & 2\lambda_3 & \lambda_3+\lambda_2 & \lambda_3+\lambda_1 \\ &&& 0 & \lambda_2-\lambda_3 & \lambda_1-\lambda_3 \\ &&&& 0 & \lambda_1-\lambda_2 \\ &&&&& 0 \end{array}$$

(les coefficients en-dessous de la diagonale sont les opposés de leurs symétriques par rapport à la diagonale). Soit $\varepsilon_i$ la forme $X \mapsto \lambda_i$ sur $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{g}$ se décompose en

$$\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha , \tag{1}$$

où $R = R^+ \cup (-R^+)$ et $R^+$ est l'ensemble des formes

$$\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_3, \varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_3, \varepsilon_2+\varepsilon_3, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3.$$

Les sous-espaces poids correspondant sont engendrés par (dans le même ordre)

$$F_{12}, F_{23}, F_{13}, F'_{15}, F'_{14}, F'_{24}, F'_{34}, F'_{25}, F'_{16} ,$$

où $F_{ij} = E_{ij} - E^*_{ij}$ et $F'_{ij} = E_{ij} + E^*_{ij}$. Pour $\alpha \in R^+$, le sous-espace poids correspondant à $-\alpha$ est engendré par la transposée du générateur de $\mathfrak{g}^\alpha$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est formée d'éléments semi-simples, elle est abélienne et l'équation **??** montre qu'elle est égale à son centralisateur. Elle est donc bien une sous-algèbre de Cartan et nous venons d'exhiber la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces poids.

b) Pour $X \in \mathfrak{h}$, le centralisateur de $X$ est la somme directe de $\mathfrak{h}$ et des espaces poids $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in R$, tels que $\alpha(X) = 0$.

c) On choisit $X$ tel que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et que $\lambda_3 = 0$. Alors ${R^+}'$ est formé de $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ et de $\gamma = 2\varepsilon_3$ et

$$\mathfrak{g}(X) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}^\gamma \oplus \mathfrak{g}^{-\gamma}.$$

Aucune des quatre formes $\pm\alpha \pm \gamma$ n'est racine, de façon que $[\mathfrak{g}^{\pm\alpha}, \mathfrak{g}^{\pm\gamma}] = 0$. Ainsi, l'algèbre dérivée est égale à la somme de $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^{\pm\alpha}]$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^{\pm\gamma}]$, $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ et $[\mathfrak{g}^\gamma, \mathfrak{g}^{-\gamma}]$. On obtient donc

$$[\mathfrak{g}(X), \mathfrak{g}(X)] = \mathfrak{s}_\alpha \oplus \mathfrak{s}_\gamma \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}).$$

2) a) L'opérateur $\rho(X)$ vérifie

$$(\rho(X)v, w) + (v, \rho(X)w) = 0$$

pour tous $v, w \in V$. Nous avons donc ${}^t\rho(X) = -\rho(X)$ et $\rho(X)$ est antisymétrique. Donc ses valeurs propres sont imaginaires pures.

b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de $\rho(X)$ (écrites avec leurs multiplicités algébriques). Alors le nombre

$$b_V(X,X) = \mathrm{tr}(\rho(X), \rho(X)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

est un réel $\leq 0$ puisque les $\lambda_i$ sont imaginaires pures.

3) a) Soit $b_0 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{R}$ un produit scalaire quelconque sur $\mathfrak{g}$. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, posons

$$b(X,Y) = I(f_{X,Y}).$$

où $f_{X,Y}(h) = b_0(\mathrm{Ad}(h)X, \mathrm{Ad}(h)Y)$, $h \in G$. Alors $b$ est bilinéaire (car $b_0$ est bilinéaire et $I$ est linéaire), symétrique (car $b_0$ l'est) et définie positive (car $b_0$ et $I$ le sont). En outre, pour $g \in G$, nous avons

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y}(h) &= b_0(\mathrm{Ad}(h)\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(h)\mathrm{Ad}(g)Y) \\ &= b_0(\mathrm{Ad}(hg)X, \mathrm{Ad}(hg)Y) \\ &= f_{X,Y}(hg) \\ &= (R_g f_{X,Y})(h) \end{aligned}$$

et donc $b(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = b(X,Y)$ grâce à l'invariance de $I$ par translations à droite.

b) Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-représentation de la représentation adjointe, l'orthogonal $\mathfrak{a}^{\perp}$ pour le produit scalaire invariant est un supplémentaire invariant. Donc $\mathfrak{g}$ est complètement réductible.

c) Les sous-représentations de la représentation adjointe sont exactement les idéaux de $\mathfrak{g}$. Donc les $\mathfrak{a}_i$ sont bien des idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$ et l'égalité $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ se traduit en un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$. Chacun des idéaux $\mathfrak{a}_i$ est soit abélien, et alors il est de dimension un, soit simple. Soit $\mathfrak{c}$ la somme des idéaux abéliens parmi les $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{s}$ la somme des idéaux simples. Alors clairement $\mathfrak{g}$ est isomorphe au produit de $\mathfrak{c}$ par $\mathfrak{s}$.

d) Soit $b$ une forme sur $\mathfrak{g}$ invariante par $G$ et définie positive. Alors sa restriction à $\mathfrak{s}$ est invariante par $G$ est définie positive. Par dérivation, on voit qu'elle est invariante par $\mathfrak{g}$ et donc par $\mathfrak{s}$. Ainsi, la représentation adjointe de $\mathfrak{s}$ vérifie les hypothèses de l'exercice précédent. Donc la forme sur $\mathfrak{s}$ associée à la représentation adjointe est négative. Mais cette forme n'est autre que la forme de Killing. La forme de Killing de $\mathfrak{s}$ est donc négative. Elle est définie puisque $\mathfrak{s}$ est semi-simple.

4) a) L'algèbre de Lie $\mathfrak{c}$ est isomorphe à $\mathbf{R}^n$ pour un $n \geq 0$. Elle est donc isomorphe à l'algèbre de Lie du tore $T = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$.

b) Soit $A$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$. On sait que l'algèbre de Lie de $A$ s'identifie à l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{g}$ et puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple cette dernière est isomorphe à $\mathfrak{g}$ (par l'isomorphisme $X \mapsto \mathrm{ad}(X)$). Le groupe $A$ est compact, puisqu'il s'identifie à un sous-groupe fermé du groupe orthogonal de l'espace $\mathfrak{g}$ muni de la forme de Killing (le groupe orthogonal est compact puisqu'il s'identifie à une partie fermée d'un produit de sphères).

c) Le groupe produit $G = T \times A$ a pour algèbre de Lie l'algèbre produit $\mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$.

5) Soit $b$ un produit scalaire invariant par $G$ sur $\mathfrak{g}$. Considérons la fonction $h \mapsto b(\mathrm{Ad}(h)X, Y)$. Comme $G$ est compact, il existe $g \in G$ tel que $b(\mathrm{Ad}(g)X, Y)$ est minimal. Pour $Z \in \mathfrak{g}$, considérons la fonction réelle

$$f : t \mapsto b(\mathrm{Ad}(\exp(tZ)g)X, Y).$$

Elle prend un minimum en $t = 0$ et puisque la différentielle de $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ en $e \in G$ est $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, nous avons

$$\frac{df}{dt}(0) = b(\mathrm{ad}(Z)(\mathrm{Ad}(g)X), Y) = b([Z, \mathrm{Ad}(g)X], Y) = b(Z, [\mathrm{Ad}(g)X, Y]).$$

Comme $b$ est non-dégénérée et $Z \in \mathfrak{g}$ quelconque, on a $[\mathrm{Ad}(g)X, Y] = 0$.

6) Soient $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ deux sous-algèbres de Cartan. Alors comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $\mathfrak{h}$ est le centralisateur d'un élément régulier $X$ et $\mathfrak{k}$ le centralisateur d'un élément régulier $Y$. Grâce au point précédent, il existe $g \in G$ tel que $[\mathrm{Ad}(g)X, Y] = 0$. Donc $\mathrm{Ad}(g)X$ est un élément régulier du centralisateur $\mathfrak{k}$ de $Y$ et son centralisateur $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$ coïncide avec $\mathfrak{k}$. Comme $G$ est connexe, $\mathrm{Ad}(g)$ appartient à $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.