Un corrigé des exercices de révision

1) a) Munissons $\mathfrak{g}$ d'une norme. Soit $r > 0$ un nombre réel tel que l'exponentielle est un difféomorphisme la boule B' de $\mathfrak{g}$ de rayon r autour de 0 sur son image dans G. Soit B la boule de rayon $r/2$ autour de 0 et soit U l'image de B par l'exponentielle. Supposons que H est un sous-groupe de G contenu dans U. Supposons que h est un élément non-trivial de H. Nous avons $h = \exp(X)$ pour un unique $X \in B$. Soit n le plus petit entier > 1 tel que $n\,||X||$ soit supérieur à $r/2$. Alors nous avons $r/2 < n||X|| < r$, X appartient à B' mais non pas à B et $h^n = \exp(nX)$ appartient à $\exp(B')$ mais non pas à U (puisque exp est une bijection de B' sur $\exp(B')$). Cette contradiction montre que H est trivial.

b) On sait qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp(X)\exp(Y) = \exp(H(X,Y))$ pour tous les $X, Y \in V$, où $H(X,Y)$ est l'opérateur de Hausdorff. La formule de Campbell-Hausdorff montre que

$$H(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \dots$$

où tous les termes supérieurs sont des crochets itérés de X et Y. On a donc bien $H(X,Y) = X + Y + R$ pour un $R \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

c) Choisissons un voisinage U contenu dans $\exp(V)$, où V est comme dans la question précedente. Puisque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, la question précédente montre que les éléments de U commutent deux à deux. Donc le sous-groupe H engendré par U est commutatif. Puisque G est connexe, il est engendré par tout voisinage de e. Donc G est égal à H.

d) On n'a pas nécessairement $[X,Y] = 0$. En effet, considérons $G = GL(2, \mathbf{C})$ et

$$X = \begin{bmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors $\exp(X) = e$ commute bien à $\exp(Y)$ mais $[X,Y] = 4\pi i Y \neq 0$.

e) Le centre $Z(G)$ du groupe G est formé des éléments $g \in G$ tels que $gh = hg$ pour tous les $h \in G$. Le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est formé des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $[X,Y] = 0$ pour tous les $Y \in \mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie de $Z(G)$ est contenue dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. En effet, l'algèbre de Lie de $Z(G)$ est formée des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\exp(tX)g = g\exp(tX)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $g \in G$. Comme $g\exp(tX)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)tX)$, il s'ensuit que $\mathrm{Ad}(g)(X) = X$ pour tout $g \in G$ et donc que $\mathrm{ad}(Y)(X) = 0$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ ce qui signifie que X appartient au centre de $\mathfrak{g}$. Si G est connexe, le centre de $\mathfrak{g}$ est égal à l'algèbre de Lie du centre de G. En effet, dans ce cas, le groupe G est engendré par les $\exp(X)$, $X \in \mathfrak{g}$. Si Y appartient au centre de $\mathfrak{g}$, l'égalité

$$\mathrm{Ad}(\exp(X))(Y) = \exp(\mathrm{ad}(X)(Y) = Y$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, implique alors que $\mathrm{Ad}(g)(Y) = Y$ pour tout $g \in G$. Nous avons donc $g\exp(tY)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)tY) = \exp(tY)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ ce qui montre que $\exp(tY)$ est central dans G pour tout $t \in \mathbf{R}$ et que Y appartient à l'algèbre de Lie de $Z(G)$. Si G est non connexe, l'inclusion peut être stricte comme le montre l'exemple du groupe G qui en tant que variété est le produit de $\{\pm 1\}$ par $\mathbf{R}$ et qui est muni de la multiplication

$$(\varepsilon, x) \cdot (\varepsilon', x') = (\varepsilon\,\varepsilon', \varepsilon' x + x').$$

Le centre de ce groupe est trivial alors que le centre de son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{R}$ est égal à $\mathfrak{g}$.

2) a) On sait que H opère dans $V(m)$ de façon diagonalisable, que ses valeurs propres sont $-m, -m+2, \ldots, m-2, m$ et qu'elles sont toutes de multiplicité 1. Ceci entraîne que

$$\chi(m) = T^{-m} + T^{-m+2} + \cdots + T^{m-2} + T^{m}.$$

b) Soit $p : \mathbf{C}[T, T^{-1}] \to \mathbf{C}[T]$ l'application qui envoie T^i sur 0 si $i < 0$ et sur T^i si $i > 0$. Les images des $\chi(m)$ par p forment une base de $\mathbf{C}[T]$ (la matrice de passage à la base canonique est triangulaire avec des coefficients 1 sur la diagonale). Donc les $\chi(m)$ forment une famille libre.

c) Structure de $\mathfrak{h}$-module sur $\mathrm{Hom}\,(V, W)$: pour $X, Y \in \mathfrak{h}$ et $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, nous avons

$$\begin{aligned} X(Yf) &= X(Yf(?) - f(Y?)) = XYf(?) - Xf(Y?) - Yf(X?) + f(YX?) \\ Y(Xf) &= Y(Xf(?) - f(X?)) = YXf(?) - Yf(X?) - Xf(Y?) + f(XY?). \end{aligned}$$

Puisque V et W sont des $\mathfrak{h}$-modules, il s'ensuit que $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.

Structure de $\mathfrak{h}$-module sur $V \otimes W$: comme les tenseurs $v \otimes w$ engendrent $V \otimes W$, la structure est unique si elle existe. Comme l'expression

$$(Xv) \otimes w + v \otimes (Xw)$$

est bilinéaire en v et w, il existe bien un endomorphisme $\rho(X)$ de $V \otimes W$ qui envoie $v \otimes w$ sur $(Xv) \otimes w + v \otimes (Xw)$. Il reste à vérifier que $X \mapsto \rho(X)$ est une représentation de $\mathfrak{h}$. Or nous avons

$$\begin{aligned} X(Y(v \otimes w)) &= (XYv) \otimes w + (Yv) \otimes (Xw) + (Xv) \otimes (Yw) + v \otimes (XYw) \\ Y(X(v \otimes w)) &= (YXv) \otimes w + (Xv) \otimes (Yw) + (Yv) \otimes (Xw) + v \otimes (YXw) \end{aligned}$$

et puisque V et W sont des $\mathfrak{g}$-modules, la différence des deux membres de droite est bien égale à

$$([X, Y]v) \otimes w + v \otimes ([X, Y]w).$$

Structure de $\mathfrak{h}$-module sur V^* : on trouve que

$$(Xv^*)(v) = -v^*(Xv)$$

pour $X \in \mathfrak{h}$, $v^* \in V^*$ et $v \in V$.

Soit $\varphi = \varphi(V, W)$ le morphisme canonique de l'affirmation. Pour $X \in \mathfrak{h}$ et $w \otimes v^* \in W \otimes V^*$, nous avons

$$X(w \otimes v^*) = (Xw) \otimes v^* + w \otimes Xv^*$$

Donc $\varphi(X(w \otimes v^*))$ appliqué à v donne

$$(Xw)v^*(v) - wv^*(Xw)$$

ce qui est égal à $X\varphi(w \otimes v^*)$ appliqué à v. L'application φ est donc bien un homomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules. Clairement, $\varphi(V, W)$ est un isomorphisme si $V = k$. Si $V = k^n$, alors $\varphi(V, W)$ s'identifie à la somme directe de n copies de $\varphi(k, W)$ et c'est donc un isomorphisme.

d) Notons V_i l'espace propre de H dans V pour la valeur propre i. Nous avons alors $(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$. Ceci implique que $\chi(V \oplus W) = \chi(V) + \chi(W)$.

L'espace V^* se décompose en la somme des espaces propres de $\rho(H)^*$ et on sait que l'accouplement canonique $V^* \otimes V \to k$ met en dualité l'espace propre V_i avec l'espace propre de $\rho(H)^*$ correspondant à la valeur propre i. Comme H agit par $-\rho(H)^*$ dans V^*, nous avons $(V^*)_i \xrightarrow{\sim} (V_{-i})^*$. Ceci implique que $\chi(V^*)(T) = \chi(V)(T^{-1})$. Or on sait que $\dim V_i = \dim V_{-i}$ pour tout $\mathfrak{g}$-module irréductible V et donc, par complète réductibilité, pour tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. Donc $\chi(V)(T^{-1}) = \chi(V)(T)$ et $\chi(V^*) = \chi(V)$.

Si v et w sont des vecteurs propres de H associés aux valeurs propres i et j, l'égalité

$$H(v \otimes w) = (Hv) \otimes w + v \otimes (Hw) = (i+j)\, v \otimes w$$

montre que $v \otimes w$ est associé à la valeur propre $i+j$. Si $k = i+j$, nous avons donc $V_i \otimes W_j \subset (V \otimes W)_k$ et

$$\bigoplus_{i+j=k} V_i \otimes W_j \subset (V \otimes W)_k$$

Cette inclusion est une égalité car si nous formons la somme sur tous les $k \in \mathbf{N}$ des deux côtés, nous trouvons $V \otimes W$ à droite et un espace de la même dimension à gauche.
En utilisant l'isomorphisme de c) et les identités que nous avons déjà montrées nous trouvons

$$\chi(\mathrm{Hom}_k(V, W)) = \chi(V \otimes W^*) = \chi(V)\chi(W^*) = \chi(V)\chi(W).$$

e) Si V est un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, nous avons

$$V \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} n_m\, V(m)$$

pour des n_m, $m \in \mathbf{N}$, uniques (et nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux). Donc

$$\chi(V) = \sum_{m \in \mathrm{N}} n_m\, \chi(m).$$

Puisque les $\chi(m)$ sont linéairement indépendants, le caractère $\chi(V)$ détermine les n_m. Or les n_m déterminent V à isomorphisme près.

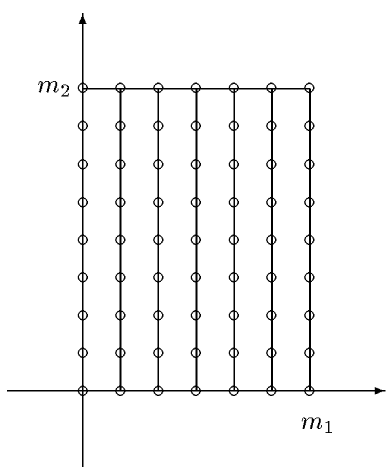
f) On souhaite montrer l'isomorphisme dit de Clebsch-Gordan

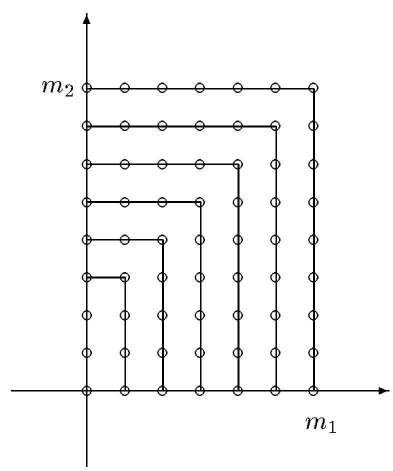
$$V(m_1) \otimes V(m_2) \xrightarrow{\sim} \bigoplus V(m) \tag{1}$$

où la somme porte sur les entiers m tels que

$$m_2 - m_1 \leq m \leq m_2 + m_1 \quad \text{et} \quad m \equiv m_1 + m_2 \bmod 2. \tag{2}$$

(Une erreur s'était glissée dans l'énoncé des conditions (2) dans le sujet).



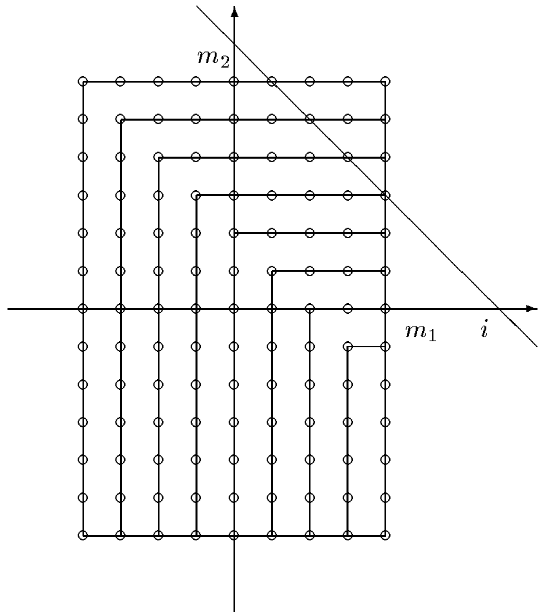


Examinons la figure de gauche. Sur chaque segment vertical se trouvent $m_2 + 1$ points entiers. Le nombre de segments est de $m_1 + 1$. Nous trouvons $(m_1+1)(m_2+1)$ points entiers. Examinons la figure de droite. Sur le 'crochet' qui joint le point $(i, 0)$, $0 \leq i \leq m_1$, au point $(0, m_2 - m_1 + i)$ se trouvent $(m_2 - m_1 + i + 1) + (i+1) - 1 = m_2 - m_1 + 2i + 1$ points entiers. Le nombre total de points entiers dans le rectangle est donc de

$$(m_1+1)(m_2+1) = (m_2-m_1+1)+(m_2-m_1+3)+\cdots+(m_2-m_1+2i+1)+\cdots+(m_2+m_1+1).$$

Puisque $\dim V(m) = m+1$, cette égalité montre l'égalité des dimensions des deux côtés de (1).

g) Nous montrons l'égalité des caractères des deux côtés de (1). Soit $P = \chi(m_1)\chi(m_2)$. Appelons 'point entier admissible' un point $(x, y) \in (m_1 + 2\mathbf{Z}) \times (m_2 + 2\mathbf{Z})$. Alors le coefficient de T^i dans P est égal au nombre de points entiers admissibles (x, y) tels que $x + y = i$ et qui se trouvent dans le rectangle défini par les inégalités $-m_1 \leq x \leq m_1$, $-m_2 \leq y \leq m_2$. Nous écrivons l'ensemble de ces points comme réunion disjointe des points entiers admissibles qui se trouvent sur les crochets comme dans la figure ci-dessous. Les points entiers admissibles figurant sur le crochet qui joint le point $(m_1, m_2 - 2j)$ au point $(-m_1 + 2j, -m_2)$ correspondent à la contribution de $\chi(m_1 + m_2 - 2j)$.



h) Supposons d'abord que V est *indécomposable* (ou *cyclique*) sous l'action de f, c'est-à-dire que la matrice de f par rapport à une base de Jordan $e_0, \ldots, e_{n-1}$ ne comporte qu'un seul bloc de Jordan (inférieur) de façon que nous avons $f(e_i) = e_{i+1}$ pour $i < n - 1$ et $f(e_{n-1}) = 0$. On définit alors $\rho(F) = f$, $H.e_i = (n-2i)e_i$ et $E.e_i = i(n-i+1)e_{i-1}$ pour $i > 0$ et $E.e_0 = 0$. On sait qu'on définit ainsi une structure de $\mathfrak{g}$-module irréductible sur V.

Dans le cas général, on décompose V en une somme directe de sous-espaces invariants indécomposables et on munit chacun de ces sous-espaces d'une structure de $\mathfrak{g}$-module irréductible tel que F y agit par f.

Supposons que V est muni d'une représentation de $\mathfrak{g}$ et posons $f = \rho(F)$. Alors toute décomposition de V en somme de modules simples de dimensions $d_1, \ldots, d_r$ nous donne une décomposition de V en somme directe de sous-espaces invariants indécomposables de dimensions $d_1, \ldots, d_r$. Or on sait que f détermine le nombre et les dimensions des sous-espaces indécomposables qui apparaissent dans une décomposition de V sous l'action de f. Donc $f = \rho(F)$ détermine la représentation ρ à isomorphisme près.

En outre la décomposition de V en sous-espaces invariants $\rho(F)$-indécomposables (la 'jordanisation de $\rho(F)$') correspond à la décomposition de V en somme directe de $\mathfrak{g}$-modules simples.

i) Supposons V muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-modules tel que F agit par f. L'espace $\mathfrak{gl}(V)$ muni de l'action de ad$f$ correspond alors au $\mathfrak{g}$-module

$$\mathrm{Hom}_k(V, V) \xrightarrow{\sim} V \otimes V^* \xrightarrow{\sim} V \otimes V.$$

Supposons que $d_1, \ldots, d_r$ sont les tailles des blocs de Jordan de f (avec répétitions). L'isomorphisme de Clebsch-Gordan donne la règle suivante : la multiplicité du bloc de Jordan de taille d de ad$f$ est égale au nombre de couples (d_i, d_j) tels que $d \equiv d_i + d_j \bmod 2$ et que $|d_i - d_j| \leq d \leq d_i + d_j$.

3) a) Soit U un ouvert de G. Alors UH est ouvert car il est égal à la réunion des ouverts Uh, $h \in H$. Donc $\pi(U)$ est ouvert.

b) Supposons que G/H est séparé. Alors $\pi(e)$ est fermé dans G/H et donc $H = \pi^{-1}(\pi(e))$ est fermé dans G.

Réciproquement, supposons H fermé dans G. Soient $\pi(x)$ et $\pi(y)$ deux points distincts de G/H. Comme le groupe G agit transitivement et par des homéomorphismes dans G/H, nous pouvons supposer que $x = e$. Il suffit alors de trouver des voisinages ouverts U et V de e dans G tels que $UH \cap VxH$ soit vide. Or cette condition équivaut à ce que $V^{-1}U \cap xH$ soit vide. Comme le complémentaire C de xH dans G est ouvert et que l'application $(u, v) \mapsto v^{-1}u$ de $G \times G$ dans G est continu et envoie (e, e) dans C, il existe bien un voisinage $U \times V$ de (e, e) dans $G \times G$ tel que U, V vérifient cette condition.

c) Supposons que G est la réunion de deux ouverts disjoints U et V. Alors xH est la réunion disjointe des ouverts relatifs $xH \cap U$ et $xH \cap V$. Comme H et donc xH est connexe, il est égal à l'un de ces deux ouverts et l'autre est vide. Chaque classe xH est donc contenu dans U ou V ce qui montre que $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont ouverts dans G/H et que G/H est leur réunion disjointe. Donc $\pi(U)$ ou $\pi(V)$ est vide ce qui implique que U ou V est vide.

d) Le groupe $SO(n+1)$ agit transitivement sur S^n (tout vecteur de longueur 1 se complète en une base orthonormée et directe) et $SO(n)$ est le stabilisateur de $v \in S^n$. On a donc une application bijective et continue $SO(n+1)/SO(n) \xrightarrow{\sim} S^n$. Puisque $SO(n+1)/SO(n)$ est compact, cette application est fermée. Elle est donc un homéomorphisme. L'homéomorphisme $SU(n+1)/SU(n) \xrightarrow{\sim} S^{2n+1}$ se démontre de façon tout à fait analogue. L'homéomorphisme $U(n)/SU(n) \xrightarrow{\sim} S^1$ est induit par le déterminant.

e) Les groupes $SO(1) \xrightarrow{\sim} S^1$, $SU(1) = \{e\}$ et $U(1) \xrightarrow{\sim} S^1$ sont connexes. Par récurrence, on en déduit grâce à c) et d) et à la connexité des sphéres S^n, $n \geq 1$, que $SO(n)$ et $SU(n)$ sont connexes pour $n \geq 1$. La connexité de S^1 et de $SU(n)$ implique la connexité de $U(n)$ grâce à c) et d).

4) a) On sait qu'il existe un voisinage ouvert $U_1 \times V_1$ de $(0, 0)$ dans $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$ tel que l'application $(X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y)$ est un difféomorphisme sur son image I (coordonnées de seconde espèce). En outre, comme H est un sous-groupe *fermé*, c'est une sous-variété et on peut choisir U_1 et V_1 tels que $(X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y)$ induit une bijection de $\{0\} \times V_1$ sur $I \cap H$. On pose alors $B = \exp(V_1)$ et $A' = \exp(U \cap U_1)$. L'application de multiplication $\mu : A' \times B \to G$ est un difféomorphisme sur son image car

$$\exp \times \exp : (U \cap U_1) \times V_1 \to A' \times B$$

est un difféomorphisme et la composition $\mu \circ (\exp \times \exp)$ est un difféomorphisme de $U_1 \times V_1$ sur son image. On a clairement $B \subset H \cap A'B$. Réciproquement, on a $H \cap A'B \subset H \cap I = B$.

b) L'égalité $a_1 h_1 = a_2 h_2$ entraîne que $a_2^{-1} a_1 = h_2 h_1^{-1}$. Or $a_2^{-1} a_1$ appartient à $C^{-1}C \subset A'B$. Donc $h_2 h_1^{-1}$ appartient à $A'B \cap H = B$ et l'égalité

$$a_1\, e = a_2 (h_1\, h_2^{-1})$$

entre deux membres de $A'B$ permet, grâce à a), de conclure que l'on a $a_1 = a_2$ et $e = (h_1\, h_2^{-1})$.

c) L'application de multiplication $A \times H \to AH$ est injective d'après b). Elle est clairement surjective. D'après a), elle est un difféomorphisme sur $A \times B$. Donc elle est un difféomorphisme sur $A \times Bh$ pour tout $h \in H$. La réunion des $A \times Bh$ est égale à $A \times H$.

L'application $A \times H \to AH$ est en particulier une submersion et donc ouverte. Ainsi AH est ouvert dans G et $\pi(A) = \pi(AH)$ est ouvert dans G/H. D'après c), l'application $\pi : A \to \pi(A)$ est bijective. Elle est continue en tant que restriction de $\pi : G \to G/H$. Elle est ouverte, car si $U \subset A$ est ouvert, alors $U \times H$ est ouvert dans $A \times H$, donc UH est ouvert dans AH et donc dans G, et $\pi(U) = \pi(UH)$ est ouvert dans G/H.

d) Soient g_1 et g_2 deux éléments de G tels que $\pi(g_1 A) \cap \pi(g_2 A)$ est non vide. Sur son domaine de définition, l'application $\varphi_{g_1} \varphi_{g_2}^{-1}$ est donnée par la composition

$$\exp^{-1} \circ L_{g_1^{-1}} \circ s_{g_1} \circ \pi \circ L_{g_2} \exp$$

Il suffit donc de voir que $s_{g_1} \circ \pi$ restreinte à $g_2 A$ est différentiable. Or elle est égale à la composition de l'inclusion $g_2 A \to g_1 AH$ avec l'application $g_1 AH \to g_1 A$ qui à $g_1 ah$ associe $g_1 a$. Cette dernière est différentiable d'après c).

e) On munit G/H de l'atlas défini par les cartes de d). La projection $\pi : G \to G/H$ restreinte au voisinage AH de e s'identifie alors à la projection de $A \times H$ sur A (par d et c) ce qui montre que π est un fibré localement trivial dans un voisinage de $\pi(e) \in G/H$ et donc partout puisque la structure définie sur G/H est préservé par les translations et que π commute aux translations. En particulier, π est une submersion surjective. Il est clair d'après a) et d) que l'application tangente à π induit un isomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $T_{\pi(e)}(G/H)$. Donc $T_e(\pi)$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sur $T_{\pi(e)}(G/H)$. Finalement la structure différentiable est unique car la structure différentiable de toute variété N but d'une submersion surjective $\varphi : M \to N$ est uniquement déterminée par M et l'application φ.

f) Le groupe $SU(1) = \{e\}$ est simplement connexe. D'après 3 d) et 4 e), nous avons un difféomorphisme $SU(n+1)/SU(n) \xrightarrow{\sim} S^{2n+1}, g \mapsto gv$ pour tout $n \geq 1$. Donc l'application $SU(n+1) \to S^{2n+1}, g \mapsto gv$ est un fibré localement trivial de fibre $SU(n)$ et nous avons une suite exacte de groupes fondamentaux

$$\pi_1(SU(n)) \to \pi_1(SU(n+1)) \to \pi_1(S^{2n+1}) \to 1.$$

Par récurrence, il s'ensuit que $\pi_1(SU(n+1))$ est trivial.

Grâce à 3 d) et 4 e), le déterminant $U(n) \to S^1$ est un fibré localement trivial de fibre $SU(n)$. Comme $\pi_1(SU(n)) = \{e\}$, la suite exacte des groupes fondamentaux montre que $\pi_1(U(n)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$.