Examen de Janvier 2000

Avertissement : Documents et calculettes sont interdits.

I. Décomposition polaire et applications

1) Soit $n \geq 1$. Pour une matrice $A \in M(n, \mathbf{C})$, on note A^* la matrice transposée conjuguée. Soit $\mathfrak{p} \subset M(n, \mathbf{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes et $\mathfrak{p}^+$ l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives.

   a) Constater que $\mathfrak{p}$ est un espace vectoriel réel et montrer que $\mathfrak{p}^+$ est un ouvert de $\mathfrak{p}$. En particulier, ces deux ensembles sont des variétés différentiables.

   b) Montrer que l'application
   $$\varphi : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^+ \ , \ A \mapsto e^A$$
   est surjective. Indication : on commencera par montrer que les matrices diagonales contenues dans $\mathfrak{p}^+$ appartiennent à l'image de φ.

   c) Montrer que l'application φ est injective. Indication : on commencera par montrer que $A \in \mathfrak{p}$ et e^A induisent la même décomposition de $\mathbf{C}^n$ en sous-espaces propres.

   d) Montrer que la différentielle de φ est inversible en tout point $A \in \mathfrak{p}$.

   e) Déduire des points précédents que φ est un difféomorphisme.

2) Soit G le groupe $GL(n, \mathbf{C})$ considéré comme groupe de Lie réel. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ son algèbre de Lie. Soit $U \subset G$ le sous-groupe des matrices unitaires.

   a) Montrer que U est un sous-groupe de Lie fermé et que son algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ est formée des matrices antihermitiennes.

   b) Soit l'application
   $$\psi : U \times \mathfrak{p} \to G \ , \ (k, X) \mapsto k \ \exp(X).$$
   Montrer que ψ est un difféomorphisme. Indication : on pourra se servir du premier exercice pour construire un inverse de ψ. On notera pour cela que si $g = k \exp(X)$, $k \in U$, $X \in \mathfrak{p}$, alors $g^* \, g = \exp(2X)$.

   c) Montrer que U est un sous-groupe compact maximal de G.

3) Soit $G_1 \subset G$ un sous-groupe fermé tel que $G_1^* = G_1$. Soit $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_1$. Soit G_1^0 la composante neutre de G_1.

   a) Montrer que $\mathfrak{g}_1^* = \mathfrak{g}_1$ et que $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$.

   b) Montrer que le sous-groupe $U \cap G_1$ est compact et que son algèbre de Lie est $\mathfrak{u}_1$.

   c) Soit $K_1^0 \subset G_1$ le sous-groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_1$. Montrer que K_1^0 est la composante neutre de $U \cap G_1$ et déduire que K_1^0 est compact.

   d) Soit
   $$\psi_1 : K_1^0 \times \mathfrak{p}_1 \to G_1^0 \ , \ (k, X) \mapsto k \ \exp(X).$$
   Montrer que l'image de ψ_1 est fermée.

e) Montrer que la différentielle de ψ_1 est bijective en tout point et déduire que l'image de ψ est ouverte.

f) Montrer que ψ_1 est un difféomorphisme.

g) Montrer que K_1^0 est un sous-groupe compact maximal de G_1^0 et déduire que $K_1^0 = U \cap G_1^0$.

4) Supposons de plus que $G_1 \subset G$ est un sous-groupe réel algébrique, c'est-à-dire qu'il existe une famille de polynômes à coefficients réels F_λ, $\lambda \in \Lambda$, telle que $g \in G$ appartient à G_1 si et seulement si $F_\lambda(g, \overline{g}) = 0$ pour tous les $\lambda \in \Lambda$.

a) Supposons que $X \in \mathfrak{p}$. Montrer que $\exp(2X)$ appartient à G_1 si et seulement si X appartient à $\mathfrak{p}_1$. Indication : on pourra se ramener au cas où X est une matrice diagonale à coefficients $x_1, \ldots, x_n$. Le fait que $\exp(2X)^k$ appartienne à G_1 s'exprime alors par des conditions $P_\lambda(e^{2kx_1}, \ldots, e^{2kx_n}) = 0$ pour une famille de polynômes à coefficients réels P_λ, $\lambda \in \Lambda$.

b) Soit $K_1 = G_1 \cap U$. Montrer que l'application

$$\psi_2 : K_1 \times \mathfrak{p}_1 \to G_1 \ , \ (k, X) \mapsto k \exp(X)$$

est un difféomorphisme. Déduire que K_1 est un sous-groupe compact maximal de G_1.

II. Représentations de $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$

Soit $n \geq 2$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$. On se propose de classifier les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Dans la suite, tous les modules sont supposés de dimension finie sur $\mathbf{C}$.

1) Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Cartan formée des matrices diagonales de trace nulle.

a) Expliciter le système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et les espaces de poids $\mathfrak{g}_\alpha$ qui apparaissent dans la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

de $\mathfrak{g}$ sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}$.

b) Expliciter, pour tout $\alpha \in R$, l'élément canonique $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ et des éléments $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$.

2) Soit V un $\mathfrak{g}$-module. Pour $\chi \in \mathfrak{h}^*$, on note V_χ le sous-espace de V formé des vecteurs v tels que $Hv = \chi(H)v$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$. Un vecteur non nul vérifiant cette propriété est appelé *vecteur propre pour $\mathfrak{h}$ de poids χ*. Montrer que pour $\alpha \in R$ et $\chi \in \mathfrak{h}^*$, on a $X_\alpha V_\chi \subset V_{\chi+\alpha}$.

3) On se propose de montrer que

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} V_\chi .$$

a) Montrer que la somme $V' = \sum_{\chi \in \mathfrak{h}^*} V_\chi$ est directe. Indication : Si $H_0 \in \mathfrak{h}$ est en 'position générale' (à préciser !), les espaces propres de l'opérateur $V' \to V', v \mapsto H_0 v$ sont les V_χ.

b) Montrer que V' est un $\mathfrak{g}$-sous-module de V.

c) Montrer qu'il existe un $\mathfrak{g}$-sous-module V'' de V tel que $V = V' \oplus V''$.

d) Montrer que si V'' est non nul, il contient un vecteur propre pour $\mathfrak{h}$. Déduire que $V'' = 0$ et conclure.

4) Une forme $\chi \in \mathfrak{h}^*$ est un *poids* de V si $V_\chi \neq 0$. Dans ce cas, la *multiplicité* du poids χ est la dimension de V_χ. Déterminer les poids et leurs multiplicités lorsque $V = \mathbf{C}^n$ est donné par la représentation tautologique et lorsque $V = \mathfrak{g}$ est donné par la représentation adjointe.

5) Soit $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre des matrices strictement triangulaires supérieures et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures. Soit $R^+ \subset R$ la partie définie par

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha \,.$$

a) Montrer que pour un vecteur non nul $v \in V$, on a équivalence entre

(i) la droite $\mathbf{C}v$ est stable par $\mathfrak{b}$.

(ii) v est vecteur propre pour $\mathfrak{h}$ et $X_\alpha v = 0$ pour tout $\alpha \in R^+$.

b) Un vecteur non nul est *primitif* s'il vérifie (i) et (ii). Montrer que tout $\mathfrak{g}$-module non nul de dimension finie contient un vecteur primitif.

6) Soit $v \in V$ un vecteur primitif de poids χ. Soit $V' \subset V$ le $\mathfrak{g}$-sous-module engendré par v. Soit $\mathfrak{n}_- \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre des matrices strictement triangulaires inférieures. Notons que nous avons $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}_-$.

a) Soit $V^0 = \mathbf{C}v$ et pour tout $k \geq 0$, soit V^{k+1} le sous-espace engendré par V^k et les vecteurs Yu, où $Y \in \mathfrak{n}_-$ et $u \in V^k$. Montrer que l'on a $Zu \in V^{k+1}$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$ et tout $u \in V^k$. Déduire que que V' est la réunion des V^k, $k \in \mathbf{N}$.

b) Montrer que V' est engendré sur $\mathbf{C}$ par v et les vecteurs

$$u = Y_{\alpha_1} \dots Y_{\alpha_k} v \,,$$

où $k \geq 1$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ est une suite de racines positives.

c) Montrer que les poids de V' sont de la forme

$$\chi - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \,,$$

où $k \geq 0$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ est une suite de racines positives.

d) Montrer que tout vecteur de V' qui est de poids χ est un multiple de v.

e) Montrer que V' est irréductible. Indication : Si U est un sous-module de V', on pourra montrer qu'il existe un sous-module W tel que $V' = U \oplus W$. On pourra alors se servir du fait que $V'_\chi = U_\chi \oplus W_\chi$.

7) Supposons que V est irréductible. Soient v et v' deux vecteurs primitifs de V de poids respectifs χ et χ'. Montrer que $\chi = \chi'$. En déduire que v' est un multiple de v. Ainsi, le $\mathfrak{g}$-module V admet un vecteur primitif unique à un multiple scalaire près. Son poids est le *plus haut poids de* V.

8) Supposons que V et W sont deux $\mathfrak{g}$-modules irréductibles de dimension finie qui ont le même plus haut poids. On se propose de montrer que V est isomorphe à W.

a) Soient v et w des vecteurs primitifs de V et W. Montrer que le sous module U de $V \oplus W$ engendré par (v, w) est irréductible.

b) Montrer que les projections de $V \oplus W$ sur les deux facteurs induisent des isomorphismes de U sur V et W. Conclure.

9) Nous nous proposons de montrer qu'une forme χ est le plus haut poids d'une représentation irréductible si et seulement si $\chi \in \mathfrak{h}^*$ est *dominant*, c'est-à-dire que $\chi(H_\alpha)$ est un entier positif pour tout $\alpha \in R^+$.

a) Montrer que si V est une représentation irréductible de plus haut poids χ, alors χ est dominant. Indication : pour une racine positive α, on pourra considérer la restriction de V à la sous-algèbre canonique
$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathbf{C}X_\alpha \oplus \mathbf{C}H_\alpha \oplus \mathbf{C}Y_\alpha$$
et utiliser la théorie des représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$.

b) Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbf{C}$ la forme linéaire qui envoie une matrice diagonale à coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur λ_i. Notons que les ε_i engendrent $\mathfrak{h}^*$ et vérifient $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = 0$.

Montrer qu'une forme $\chi \in \mathfrak{h}^*$ est dominante si et seulement si dans toute écriture
$$\chi = u_1\varepsilon_1 + \cdots + u_n\varepsilon_n$$
les différences $u_i - u_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, sont des entiers positifs.

c) Pour $1 \leq i \leq n-1$, soit
$$\pi_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i.$$
Montrer qu'une forme $\chi \in \mathfrak{h}^*$ est dominante si et seulement si elle est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$.

d) Soit $V = \mathbf{C}^n$ la représentation tautologique et $1 \leq k \leq n-1$. On munit la k-ème puissance extérieure[1] $\Lambda^k V$ d'une structure de $\mathfrak{g}$-module par
$$X(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k) = \sum_{j=1}^{k} v_1 \wedge \ldots \wedge v_{j-1} \wedge Xv_j \wedge v_{j+1} \wedge \ldots \wedge v_k.$$
Montrer $\Lambda^k V$ est irréductible de plus haut poids π_k.

e) Soient V et V' des $\mathfrak{g}$-modules irréductibles de plus haut poids χ et χ'. Montrer que le produit tensoriel $V \otimes V'$ contient un sous-module de plus haut poids $\chi + \chi'$.

f) Montrer que si $\chi \in \mathfrak{h}^*$ est dominant, il existe une représentation irréductible V de plus haut poids χ.

Conclusion[2]: l'application qui, à un $\mathfrak{g}$-module simple, associe son plus haut poids induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathfrak{g}$-modules simples sur l'ensemble des poids dominants.

[1] Cette question est facultative. Omettez-la si la puissance extérieure ne vous est pas familière. Dans la suite, utilisez le fait que pour chaque $1 \leq k \leq n-1$, il existe un $\mathfrak{g}$-module irréductible de plus haut poids π_k.

[2] Ceci vaut plus généralement pour toute algèbre de Lie semi-simple complexe.