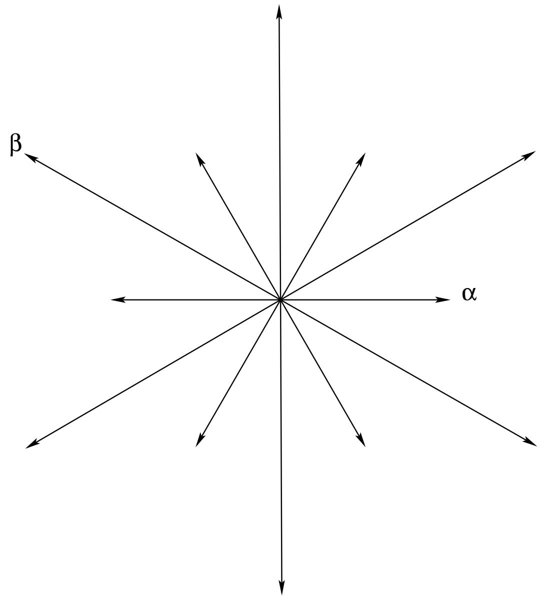
Examen de Janvier 2001

I. Un exercice sur l'algèbre de Lie simple de type G_2

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On suppose que le système de racines associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est le le système G_2 ci-dessous.



1) Quels sont le rang et la dimension de $\mathfrak{g}$? Justifier.
2) Soit $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$. Montrer que $\mathrm{ad}X_\alpha$ est nilpotent et calculer son indice de nilpotence (i.e. le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $(\mathrm{ad}X_\alpha)^n = 0$).
3) Soit $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ la racine inverse de α. Rappeler la définition de la racine inverse. Soit Y_α un élément de $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $(X_\alpha, H_\alpha, Y_\alpha)$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. Quelle liberté a-t-on dans le choix de Y_α ?
4) On considère la représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ donnée par le $\mathfrak{sl}_2$-triplet d'endomorphismes de $\mathfrak{g}$

$$(\mathrm{ad}X_\alpha, \mathrm{ad}H_\alpha, \mathrm{ad}Y_\alpha).$$

Quelle est la décomposition de cette représentation en représentations irréductibles ?
5) En déduire le rang de $(\mathrm{ad}X_\alpha)^2$.
6) Calculer la dimension de l'espace E des endomorphismes linéaires $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ qui commutent à $\mathrm{ad}X_\alpha$ et $\mathrm{ad}Y_\alpha$ et la dimension du sous-espace $D \subset E$ formé des dérivations dans E.

II. Le radical est l'orthogonal de l'algèbre dérivée

On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}(n, \mathbf{C})$ l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(n, \mathbf{C})$ la sous-algèbre des matrices strictement triangulaires supérieures et K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On pose $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}_{i+1} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_i]$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

1) Montrer que $\mathfrak{n}$ est inclus dans le noyau de K. Indication : on pourra se servir du fait que $\mathfrak{n}_i = 0$ pour $i \geq n$.

2) Montrer que la forme de Killing est donnée par

$$K(X,Y) = a\,\mathrm{tr}(XY) - b\,\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y)$$

pour deux entiers a et b que l'on déterminera.

3) Montrer que le noyau de K est la somme directe de $\mathfrak{n}$ avec la sous-algèbre des matrices scalaires.

4) Vérifier que l'orthogonal de l'algèbre de Lie dérivée $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est égal au radical de $\mathfrak{g}$ alors que l'orthogonal du radical est strictement plus grand que la sous-algèbre dérivée.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Soit $\mathfrak{r}$ son radical et K sa forme de Killing. On se propose de montrer que $\mathfrak{r}$ est l'orthogonal de l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ pour la forme de Killing.

5) Soit $\mathfrak{a}$ l'orthogonal de l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ pour la forme de Killing. Montrer que $\mathfrak{a}$ est un idéal et qu'il est résoluble. En déduire qu'il est contenu dans le radical.

6) On se propose de montrer que réciproquement, le radical $\mathfrak{r}$ est bien orthogonal à l'algèbre dérivée (et donc contenu dans $\mathfrak{a}$).

   a) Soit U un élément de $\mathfrak{g}$. Montrer que l'espace vectoriel $\mathbf{C}U + \mathfrak{r}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$. Montrer ensuite que $\mathrm{ad}[U,Z]$ est nilpotent pour tout $Z \in \mathfrak{r}$.

   b) Soient X, Y des éléments de $\mathfrak{g}$ et $Z \in \mathfrak{r}$. Montrer que $\mathfrak{g}$ admet un drapeau F tel que $\mathrm{ad}(X) \subset \mathfrak{b}(F)$ et $\mathrm{ad}[Y,Z] \subset \mathfrak{n}(F)$.

   c) Montrer que $\mathfrak{r}$ est orthogonal à l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et conclure.

III. Une propriété des tores maximaux dans les groupes compacts

Soit $T \subset U(n)$ le sous-groupe des matrices diagonales unitaires dans $U(n)$. On se propose de calculer le normalisateur $N(T)$ de T dans $U(n)$.

1) Soit $g \in N(T)$. Montrer que g permute les axes de coordonnées $D_1, \ldots, D_n$. En déduire que g est une *matrice monomiale*, c'est-à-dire que chaque colonne et chaque ligne de g contient un coefficient non nul et un seul. Indication : si $t \in T$ est à coefficients diagonaux distincts deux à deux, les D_i sont les espaces propres de t.

2) Pour $g \in N(T)$, soit $\pi(g)$ la permutation telle que $gD_i = D_{\pi(g)(i)}$. Montrer que l'on a une suite exacte

$$1 \to T \to N(T) \xrightarrow{\pi} S_n \to 1$$

et que $T = N(T)_0$. En déduire que T est un sous-groupe abélien connexe maximal.

Soit K un groupe de Lie réel compact. Soit $T \subset K$ un sous-groupe abélien connexe et qui est maximal pour ces propriétés.

3) Montrer que T est fermé. En déduire qu'il est un groupe de Lie connexe, compact abélien. Que peut-on dire de la structure de T ?

4) Montrer que le groupe des automorphismes de groupe de Lie de T s'identifie à un sous-groupe discret Λ de $GL(\mathrm{Lie}(T))$.

5) Soit $N(T)$ le normalisateur de T dans K. Montrer que $N(T)$ est un sous-groupe de Lie fermé de K. Montrer que l'action par conjugaison de $N(T)_0$ dans T est triviale.

6) Soit $\gamma : \mathbf{R} \to N(T)_0$ un sous-groupe à un paramètre. Montrer que l'ensemble $\gamma(\mathbf{R})T$ est un sous-groupe abélien connexe de K et déduire qu'il est égal à T.

7) Montrer que $N(T)_0$ est égal à T et déduire que $N(T)/T$ est fini.