Examen de Janvier 1999

Avertissement : Documents et calculettes sont interdits.

1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie et soit $\mathfrak{a}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ la représentation qui correspond à V et b_V la forme bilinéaire associée à V : pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a

$$b_V(X,Y) = \mathrm{tr}(\rho(X)\rho(Y)).$$

Il s'agit de montrer que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ est orthogonal à $\mathfrak{g}$ pour b_V.

a) Supposons que V est simple. Montrer que $\mathfrak{a}$ agit sur V par des scalaires et en déduire que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ y agit par 0. Indication : on pourra se servir du lemme suivant extrait de la démonstration du théorème de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ et λ une forme linéaire sur $\mathfrak{a}$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie et V_λ l'espace des vecteurs v tels que

$$X.v = \lambda(X)v$$

pour tout $X \in \mathfrak{a}$. Alors V_λ est un $\mathfrak{g}$-sous-module de V.

b) Supposons V quelconque et soit $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots V_n = V$ une suite de sous-modules telle que V_i/V_{i-1} est simple pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrer que pour tout $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$, on a $X.V_i \subset V_{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

c) Conclure.

2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie.

a) Montrer qu'on a équivalence entre les quatre conditions suivantes, qui caractérisent les algèbres dites *réductives*.

(i) La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

(ii) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien et $\mathfrak{s}$ un idéal semisimple de $\mathfrak{g}$.

(iii) L'algèbre $\mathfrak{g}$ admet une représentation de dimension finie V dont la forme bilinéaire associée est non dégénérée.

(iv) Le radical de $\mathfrak{g}$ est égal à son centre.

Indication : Pour déduire (iv) de (iii), on pourra se servir du résultat de l'exercice précédent.

b) Supposons que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe semisimple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces poids par rapport à $\mathfrak{h}$. Soit $X \in \mathfrak{h}$. Décrire le centralisateur

$$\mathfrak{g}(X) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X,Y] = 0\}$$

en termes de $\mathfrak{h}$ et des sous-espaces poids.

c) Montrer que la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{g}(X)$ est non dégénérée.

d) Déduire que $\mathfrak{g}(X)$ est réductive.

3) Soit G un groupe. Pour $x, y \in G$, on note ${}^{x}y$ le conjugué de y par x défini par

$$xy = {}^{x}y\, x$$

et on note (x, y) le commutateur de x et y défini par

$$xy = (x, y)\ yx.$$

a) Montrer que l'on a

$$(x, y_1 y_2) = (x, y_1)\ {}^{y_1}(x, y_2) \quad \text{et} \quad (x_1 x_2, y) = {}^{x_1}(x_2, y)\,(x_1, y)$$

pour tous $x, \ldots, y_2 \in G$.

b) On note (G, G) le *sous-groupe des commutateurs de* G : par définition, il est engendré par les commutateurs (x, y), $x, y \in G$. Déterminer (G, G) pour le sous-groupe $G \subset GL(2, \mathbf{R})$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que (G, G) est invariant par tous les automorphismes de G, que $G/(G, G)$ est abélien et que $(G, G) \subset H$ pour tout sous-groupe distingué H de G tel que G/H est abélien.

d) Soit X une partie symétrique ($X = X^{-1}$) et génératrice de G. Montrer que (G, G) est engendré par les éléments ${}^{g}(x, y)$, où $g \in G$ et $x, y \in X$.

e) A partir de ce point, on suppose que G est un groupe de Lie (réel) et on note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Montrer par un exemple qu'on peut avoir $\mathrm{Lie}((G, G)) \neq \{0\}$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

f) A partir de ce point, on suppose G connexe. Soit $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et soit H le sous-groupe de G qui est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, muni de sa structure canonique de groupe de Lie. On se propose de montrer que $H = (G, G)$. On commence par montrer l'inclusion de (G, G) dans H. Montrer pour cela qu'il existe un voisinage symétrique U de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que pour tous $X, Y \in U$, il existe $Z \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X)\exp(-Y) = \exp(Z).$$

Conclure à l'aide de d).

g) On se propose de montrer l'inclusion de H dans (G, G). Soit $g \in G$. On considère l'application

$$\alpha_g : G \to H\ ,\ x \mapsto gxg^{-1}x^{-1}.$$

Calculer $T_e(\alpha_g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

h) Montrer que $\mathfrak{h}$ est égal à la somme des images des applications $T_e(\alpha_g)$ lorsque g varie dans G.

i) Montrer qu'il existe $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que l'application

$$\alpha : G \times \ldots \times G \to H\ ,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \alpha_{g_1}(x_1) \ldots \alpha_{g_n}(x_n)$$

a une différentielle surjective au point $(e, \ldots, e)$.

j) Montrer que (G, G) contient un voisinage de e dans H et en déduire que H est inclus dans (G, G).