Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 1999-2000
Groupes et Algèbres de Lie
13/06/2000

Examen de Juin 2000 (deuxième session)

Avertissement : Documents et calculettes sont interdits.

1) Soit $G = SO(3)$ le groupe des matrices 3×3 à coefficients réels, orthogonales, de déterminant 1. Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{R}, 3)$ son algèbre de Lie.

   a) Montrer que pour tout $g \in G$, il existe un homomorphisme continu $\gamma : \mathbf{R} \to G$ tel que $\gamma(1) = g$. Indication : l'application $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est une rotation.
   b) Montrer que l'exponentielle $\mathfrak{g} \to G$ est surjective.
   c) Soit la base de $\mathfrak{g}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Soient x_1, x_2, x_3 des nombres réels et soit $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$. Quelles sont les valeurs propres de $\mathrm{ad}X$?
   d) Soit X comme dans b). Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_1, x_2, x_3 pour que la différentielle de l'exponentielle soit bijective en X.

2) Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre.

   a) On définit $N_G(\mathfrak{h})$ (resp. $C_G(\mathfrak{h})$) comme les sous-groupes de G formés des éléments g tels que $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ (resp. $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ et la restriction de $\mathrm{Ad}(g)$ à $\mathfrak{h}$ est l'identité). Montrer que $C_G(\mathfrak{h})$ est un sous-groupe distingué de $N_G(\mathfrak{h})$ et que $N_G(\mathfrak{h})$ et $C_G(\mathfrak{h})$ sont des sous-groupes fermés de G.
   b) Montrer que l'algèbre de Lie de $N_G(\mathfrak{h})$ (resp. $C_G(\mathfrak{h})$) est la sous-algèbre $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ (resp. $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$) formée des éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ (resp. $\mathrm{ad}(X)$ s'annule sur $\mathfrak{h}$).

3) Soit G un groupe de Lie complexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On suppose que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Soit $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines associé et W le groupe de Weyl. On identifie W à un sous-groupe de $GL(\mathfrak{h})$ grâce à la forme de Killing. On définit $N_G(\mathfrak{h})$ et $C_G(\mathfrak{h})$ comme dans l'exercice précédent. On se propose de montrer que la représentation adjointe induit un isomorphisme de $N_G(\mathfrak{h})/C_G(\mathfrak{h})$ sur un sous-groupe fini de $GL(\mathfrak{h})$ contenant W ([1]). Soit φ l'application

$$N_G(\mathfrak{h}) \to GL(\mathfrak{h})\ ,\ g \mapsto \mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{h}}.$$

   a) Montrer que φ induit un isomorphisme de $N_G(\mathfrak{h})/C_G(\mathfrak{h})$ sur un sous-groupe fini de $GL(\mathfrak{h})$.
   b) Soit $\alpha \in \Delta$ et soient $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $H \in \mathfrak{h}$ des éléments qui forment un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. On pose

$$g = \exp(X)\exp(-Y)\exp(X).$$

   Supposons que $G = SL(2, \mathbf{C})$. Montrer que g appartient à $N_G(\mathfrak{h})$ et que son image dans $GL(\mathfrak{h})$ est la symétrie associée à α.

[1] Ce sous-groupe est en réalité égal à W mais nous ne le démontrerons pas.

c) Montrer l'affirmation de b) pour G quelconque. Indication : on pourra utiliser la décomposition $\mathfrak{h} = \ker\alpha \oplus \mathbf{C}H$. L'élément $\mathrm{Ad}(g)(H')$ se calcule facilement pour $H' \in \ker\alpha$. Pour $H' \in \mathbf{C}H$, on se ramènera au cas de $SL(2, \mathbf{C})$.

d) Conclure.

4) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe. Soit E le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ engendré par les $\exp(\mathrm{ad}(X))$ où $X \in \mathfrak{g}$ est un élément tel que $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est nilpotent. Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ deux sous-algèbres de Cartan[2] de $\mathfrak{g}$. On se propose de montrer qu'il existe $g \in E$ tel que $g(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$.

Rappelons que pour une forme linéaire $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbf{C}$, on pose

$$\mathfrak{g}^\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}(H) - \lambda(H))^N(X) = 0 \text{ pour } N \geq \dim \mathfrak{g} \text{ et tous } H \in \mathfrak{h}\}.$$

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les formes linéaires non nulles λ telles que $\mathfrak{g}^\lambda \neq 0$.

a) Rappeler pourquoi $\mathfrak{g}$ est la somme directe de $\mathfrak{h}$ et des $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Indication : on pourra se servir du théorème de Lie. Pour montrer que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ on pourra considérer l'action de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{h}$.

b) Montrer que $\mathrm{ad}X$ est nilpotent si $X \in \mathfrak{g}^{\lambda_i}$.

c) Soit

$$f : \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}^{\lambda_1} \times \ldots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n} \to \mathfrak{g}$$

l'application définie par

$$f(H, X_1, \ldots, X_n) = (\exp \mathrm{ad}X_1)(\exp \mathrm{ad}X_2) \ldots (\exp \mathrm{ad}X_n)(H).$$

Montrer que f est polynomiale.

d) Soit $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ l'ensemble des $H \in \mathfrak{h}$ tels que $\lambda_1(H) \neq 0, \ldots, \lambda_n(H) \neq 0$. Soit $H_0 \in \mathfrak{h}'$. Montrer que l'application tangente à f en $(H_0, 0, \ldots, 0)$ est surjective.

e) Déduire que l'image de $\mathfrak{h}' \times \mathfrak{g}^{\lambda_1} \times \ldots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}$ par f contient un ouvert non vide. On admettra dans la suite que si une application *polynomiale* a une image contenant un ouvert non vide, alors cette image est dense.

f) On définit $\mathfrak{k}'$ relativement à $\mathfrak{k}$ comme $\mathfrak{h}'$ a été défini relativement à $\mathfrak{h}$. Montrer que l'intersection de $E\mathfrak{h}'$ avec $E\mathfrak{k}'$ est non vide et conclure.

[2] Rappelons qu'une sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre nilpotente égale à son normalisateur.