Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 2000-2001
Groupes et Algèbres de Lie
09/06/2001

# Examen de Juin 2001 ($2^e$ session)

## I. Trois groupes isomorphes

1) Montrer que

$$SO(3, \mathbf{C}) = \{A \in GL(3, \mathbf{C}) \mid {}^t AA = \mathbf{1} \text{ et } \det A = 1\}$$

est un groupe de Lie et déterminer son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$.

2) Montrer que l'ensemble $S^1_{\mathbf{C}}$ formé de couples $(x, y)$ de nombres complexes tels que

$$x^2 + y^2 = 1$$

est connexe.

3) Montrer que l'ensemble $E$ des matrices complexes $2 \times 2$ de déterminant nul et de trace non nulle est connexe.

4) En déduire que l'ensemble $E'$ des quadruplets $(x, y, z, t)$ de nombres complexes tels que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ et $t \neq 0$ est connexe. Indication : on pourra considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t + iz & ix + y \\ ix - y & t - iz \end{pmatrix}.$$

5) Montrer que $SO(3, \mathbf{C})/SO(2, \mathbf{C})$ est homéomorphe à la sphère complexe

$$S^2_{\mathbf{C}} = \{v \in \mathbf{C}^3 \mid q(v) = 1\}$$

où $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Indication : on pourra utiliser un théorème bien connu traité en TD.

6) En déduire que $SO(3, \mathbf{C})$ est connexe. Indication : on commencera par établir que le cercle complexe $S^1_{\mathbf{C}}$ et la sphère complexe $S^2_{\mathbf{C}}$ sont connexes.

7) Déterminer les composantes connexes de $O(3, \mathbf{C})$.

8) Montrer que si $q$ est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbf{C}^3$, alors $O(3, \mathbf{C})$ est isomorphe à

$$O(q) = \{A \in GL(3, \mathbf{C}) \mid q(Av) = q(v) \text{ pour tout } v \in \mathbf{C}^3\}.$$

Indication : Il existe une base orthonormée pour $q$.

9) Montrer que les groupes de Lie

$$PSL(2, \mathbf{C}) = SL(2, \mathbf{C})/\{\pm \mathbf{1}\}$$

et $SO(3, \mathbf{C})$ sont isomorphes. Indication : on fera opérer $SL(2, \mathbf{C})$ par congruence sur l'ensemble des matrices symétriques $2 \times 2$ par

$$(A, S) \mapsto AS\,{}^tA.$$

On notera que la forme $q(S) = \det S$ est non dégénérée et invariante par cette action.

10) Montrer que l'exponentielle n'est pas surjective pour $SL(2, \mathbf{C})$ (question de cours) mais qu'elle l'est pour $SO(3, \mathbf{C})$. Indication : ceci revient à démontrer que pour toute matrice $A \in SL(2, \mathbf{C})$, l'une au moins parmi $A$ et $-A$ est une exponentielle.

11) Montrer que $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ est une algèbre de Lie simple de rang 1.

12) a) Montrer qu'une matrice dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ est nilpotente ssi son déterminant s'annule et semisimple sinon. Indication : considérer le polynôme caractéristique.

b) Montrer qu'une matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente ssi $\delta(B) = a^2 + b^2 + c^2$ s'annule et semi-simple sinon.

13) Expliciter toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$.

14) Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ formée des matrices

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbf{C}.$$

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathrm{ad}H(\lambda)$ dans $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ et expliciter la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$, $\mathfrak{h} = \mathbf{C}H(1)$. Déterminer l'élément $H_\alpha$ canoniquement associé à $\mathfrak{h}$ et $\alpha$. Compléter $H_\alpha$ en un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

15) Déterminer l'orbite de $H_\alpha$ sous l'action adjointe de $SO(3, \mathbf{C})$.

16) Soit $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ la forme quadratique

$$q(x, y, r, s) = x^2 - y^2 - r^2 - s^2,$$

et $O(1,3)$ le groupe des $g \in GL(4, \mathbf{R})$ tels que $q(gv) = q(v)$ pour tout $v \in \mathbf{R}^4$. Montrer que le groupe de Lie réel $PSL(2, \mathbf{C})$ est isomorphe à la composante connexe de $O(1,3)$. Indication : faire opérer $SL(2, \mathbf{C})$ par congruence hermitienne sur les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x+y & r-is \\ r+is & x-y \end{pmatrix}$$

## II. Automorphismes qui laissent fixe une sous-algèbre de Cartan

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan.

1) Soit $H_0 \in \mathfrak{h}$. Montrer que $\varphi = e^{\mathrm{ad} H_0}$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que $\varphi(H) = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

Réciproquement, soit $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que $\varphi(H) = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$. On se propose de montrer que $H = \exp(\mathrm{ad} H_0)$ pour un $H_0 \in \mathfrak{h}$.

2) Soit
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$$
la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action de $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$. Montrer que $\varphi(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^\alpha$ pour tout $\alpha \in R$.

3) Pour $\alpha \in R$, soit $c_a \in \mathbf{C}$ tel que $\varphi(X) = c_\alpha X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}^\alpha$. Montrer que $c_{\alpha+\beta} = c_\alpha c_\beta$ et $c_\alpha c_{-\alpha} = 1$ si $\alpha$, $\beta$ et $\alpha + \beta$ sont des racines.

4) Soit $S \subset R$ une base du système de racines. Montrer que si $c_\alpha = 1$ pour toutes les racines simples, alors $\varphi$ est l'identité de $\mathfrak{g}$.

5) Montrer qu'il existe $H_0 \in \mathfrak{h}$ tel que $\exp(\mathrm{ad} H_0)$ et $\varphi$ coïncident sur $\mathfrak{g}^\alpha$ pour toutes les racines simples. En déduire que $\varphi = \exp(\mathrm{ad} H_0)$.