Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 1998-1999
Groupes et Algèbres de Lie
14/06/1999

Examen de Juin 1999 (2^e session)

Avertissement : Documents et calculettes sont interdits.

1) Soit $n \geq 1$. On rappelle que toute matrice diagonale H de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ à coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifie $\mathrm{ad}(H).E_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j)\, E_{i,j}$.

   Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $i^* = (n+1) - i$. Pour une matrice $A = (a_{ij})$ de taille $n \times n$, on définit la matrice cotransposée A^* par $a^*_{ij} = a_{j^*,i^*}$. Soit J la matrice de coefficients δ_{i,i^*} (symbole de Kronecker). Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie complexe

$$\begin{aligned}\mathfrak{sp}(2n, \mathbf{C}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C}) \mid {}^tX \begin{bmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{bmatrix} X = 0\} \\ &= \{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C}) \mid D = -A^*\,,\ B = B^*\,,\ C = C^*\}.\end{aligned}$$

   a) Soit $n = 3$. Montrer que la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ formée des matrices diagonales appartenant à $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan et déterminer (en même temps) le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.
   b) Soit $X \in \mathfrak{h}$. Décrire le centralisateur $\mathfrak{g}(X)$ de X dans $\mathfrak{g}$ à l'aide des espaces poids $\mathfrak{g}^\alpha$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.
   c) Montrer que $\mathfrak{g}(X)$ admet une forme invariante non-dégénérée (et qu'elle est donc réductive au sens de l'exercice suivant).
   d) Montrer qu'on peut choisir X tel que $[\mathfrak{g}(X), \mathfrak{g}(X)]$ soit isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$.

2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle et V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie muni d'une forme invariante et définie positive. Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ la représentation associée à V.

   a) Montrer que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, les valeurs propres (complexes) de l'opérateur $\rho(X)$ sont imaginaires pures.
   b) Déduire que la forme invariante $b_V : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{R}$ associée à V est négative.

3) Soit G un groupe de Lie (réel) compact et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On se propose de montrer que $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, où $\mathfrak{c}$ est abélienne, $\mathfrak{s}$ semi-simple et la forme de Killing de $\mathfrak{s}$ est définie négative.

a) Montrer que $\mathfrak{g}$ admet un produit scalaire

$$b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{R}$$

tel que $\mathrm{Ad}(g)$ est une transformation orthogonale pour tout $g \in G$. *Indication :* On pourra se servir du fait que (grâce à la compacité de G) il existe une forme linéaire

$$I : C(G) \to \mathbf{R}$$

définie positive et invariante par translations à droite (i.e. $I(f) = I(R_g f)$ où $(R_g f)(h) = f(hg)$, $g, h \in G$).

b) Déduire que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible.

c) Soit $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ une décomposition en $\mathfrak{g}$-modules simples. Montrer que les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}$ est isomorphe (en tant qu'algèbre de Lie) au produit des $\mathfrak{a}_i$. Déduire que $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, où $\mathfrak{c}$ est abélienne et $\mathfrak{s}$ semi-simple.

d) Montrer que la forme de Killing de $\mathfrak{s}$ est définie négative. *Indication :* On pourra se servir du résultat de l'exercice précédent.

4) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie *compacte*, c'est-à-dire réelle et isomorphe à $\mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, où $\mathfrak{c}$ est abélienne, $\mathfrak{s}$ semi-simple et la forme de Killing de $\mathfrak{s}$ est définie négative.

a) Montrer qu'il existe un groupe de Lie réel compact connexe T dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{c}$.

b) Montrer qu'il existe un groupe de Lie réel compact connexe A dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{s}$.

c) Déduire qu'il existe un groupe de Lie réel compact connexe G dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{g}$.

5) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie compacte (voir l'exercice précédent). On se propose de montrer que que les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjugués par le groupe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (le sous-groupe de Lie de $GL(\mathfrak{g})$ d'algèbre de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$).

Sans perte de généralité, on supposera que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe G (voir l'exercice précédent).

a) Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que

$$[\mathrm{Ad}(g)(X), Y] = 0.$$

Indication : on pourra introduire un produit scalaire G-invariant b sur $\mathfrak{g}$ (voir 3a) et choisir g tel que la fonction $g' \mapsto b(\mathrm{Ad}(g')(X), Y)$ soit minimale en g.

b) Déduire l'affirmation. *Indication :* pour une sous-algèbre Cartan donnée, on pourra considérer un élément régulier qu'elle contient.