Université Paris 7 – Denis Diderot
UFR de Mathématiques
DEA de Mathématiques

Année universitaire 1998-1999
Groupes et Algèbres de Lie
15/12/98

Exercices de révision

1) (Question de cours) Soit G un groupe de Lie (réel) et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

   a) Montrer qu'il existe un voisinage U de e dans G tel que U ne contient aucun sous-groupe non trivial de G.

   b) Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que pour $X, Y \in V$ on a

   $$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y + R)\ ,$$

   où R appartient à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

   c) Déduire que si G est connexe et $\mathfrak{g}$ abélienne, alors G est abélien.

   d) Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ tels que

   $$\exp(X)\exp(tY) = \exp(tY)\exp(X)$$

   pour tout $t \in \mathbf{R}$. A-t-on $[X, Y] = 0$? Justifier.

   e) Rappeler les définitions des centres de $Z(G)$ de G et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Le sous-groupe $Z(G)$ est-il toujours une sous-variété de G ? Quelle est la relation entre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et l'algèbre de Lie de $Z(G)$? Justifier.

2) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et soit

   $$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ la représentation associée. Le *caractère de* V est le polynôme de Laurent

   $$\chi(V) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \dim \ker(\rho(H) - n\mathbf{1}_V)\, T^n \in \mathbf{C}[T, T^{-1}].$$

   Pour tout $m \geq 0$, on note $V(m)$ 'le' $\mathfrak{g}$-module simple de dimension $m + 1$.

   a) Déterminer le caractère $\chi(m)$ de $V(m)$.

   b) Montrer que les caractères $\chi(m)$, $m \in \mathbf{N}$, forment une famille libre.

   c) Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie sur un corps k. Soient V et W deux $\mathfrak{h}$-modules. Montrer que l'espace $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ admet une structure de $\mathfrak{h}$-module telle que

   $$(Xf)(v) = Xf(v) - f(Xv)$$

   pour tous $X \in \mathfrak{h}$, $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ et $v \in V$.

Montrer que l'espace $V \otimes W$ admet une unique structure de $\mathfrak{h}$-module telle que

$$X(v \otimes w) = (Xv) \otimes w + v \otimes (Xw)$$

pour tous $X \in \mathfrak{h}$, $v \in V$ et $w \in W$.

On munit l'espace dual V^* de la structure de $\mathfrak{h}$-module de $\mathrm{Hom}_k(V, k)$ où k est le $\mathfrak{h}$-module trivial. Montrer que l'application canonique

$$W \otimes V^* \to \mathrm{Hom}_k(V, W)\,,\ w \otimes v^* \mapsto (v \mapsto wv^*(v))$$

est un homomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules et un isomorphisme si V est de dimension finie.

d) Montrer que si V et W sont deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie, on a

$$\begin{aligned} \chi(V \oplus W) &= \chi(V) + \chi(W)\,,\ \chi(V^*) = \chi(V)\,, \\ \chi(V \otimes W) &= \chi(V)\,\chi(W)\,,\ \chi(\mathrm{Hom}_k(V, W)) = \chi(V)\,\chi(W). \end{aligned}$$

e) Montrer que si V et W sont deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie tels que $\chi(V) = \chi(W)$, alors V est isomorphe à W.

f) Soit $m_1 \leq m_2$ des entiers positifs. On se propose de montrer l'isomorphisme dit de Clebsch-Gordan

$$V(m_1) \otimes V(m_2) \xrightarrow{\sim} \bigoplus V(m) \tag{1}$$

où la somme porte sur les entiers m tels que

$$m_2 \leq m \leq m_1 \quad \text{et} \quad m \equiv m_1 + m_2 \bmod 2. \tag{2}$$

Notons R l'ensemble des points à coordonnées entières du rectangle $[0, m_1] \times [0, m_2]$ de $\mathbf{R}^2$. En comptant les points de R de deux manières montrer que les deux côtés de (1) ont la même dimension (faire un dessin).

g) Raffiner l'argument du point précédent pour obtenir l'égalité entre les caractères des deux côtés (on se servira de d). En déduire l'affirmation grâce à e).

h) Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$ muni d'un endomorphisme nilpotent f. Montrer que V admet une structure de $\mathfrak{g}$-module unique à isomorphisme près telle que

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

agit par f dans V. Quel est le lien entre la forme normale de Jordan de f et la décomposition du $\mathfrak{g}$-module V en somme de modules simples ?

i) Déduire de d) et f) la forme normale de Jordan de $\mathrm{ad}f : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ en termes de celle de f.

3) Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe. On note $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Rappelons qu'une partie de G/H est ouverte si et seulement si son image réciproque par π est ouverte dans G.

a) Montrer que l'application π est ouverte.

b) Montrer que l'espace G/H est séparé si et seulement si le sous-groupe H est fermé dans G.

c) Montrer que si les espaces H et G/H sont connexes, alors G est connexe.

d) Soit $n \geq 1$ un entier et soit v le premier vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. On identifie $SO(n)$ au stabilisateur de v dans $SO(n+1)$ agissant sur $\mathbf{R}^{n+1}$. Montrer qu'on a un homéomorphisme

$$SO(n+1)/SO(n) \xrightarrow{\sim} S^n.$$

Montrer de même qu'on a des homéomorphismes

$$SU(n+1)/SU(n) \xrightarrow{\sim} S^{2n+1} \quad , \quad U(n)/SU(n) \xrightarrow{\sim} S^1.$$

e) Déduire que les groupes $SO(n)$, $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes pour tout $n \geq 1$.

4) Nous utilisons les notions rappelées à la fin de cette liste d'exercices.

Soit G un groupe de Lie (réel) et H un sous-groupe fermé. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H. On se propose de montrer que l'espace G/H admet une unique structure de variété différentiable telle que la projection $\pi : G \to G/H$ soit une submersion. En outre, pour cette structure, la projection est un fibré localement trivial de fibre H et l'application $T_e\pi : \mathfrak{g} \to T_{\pi(e)}(G/H)$ induit un isomorphisme $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} T_{\pi(e)}(G/H)$.

Nous appliquerons ce résultat au calcul des groupes fondamentaux de $SU(n)$ et $U(n)$.

a) Soit $\mathfrak{a}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Choisissons un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{a}$ tel que exp est un difféomorphisme de U sur son image A''. Montrer qu'il existe un voisinage A' de e dans A'' et un voisinage B de e dans H tels que l'application

$$A' \times B \to G \, , \; (a, b) \mapsto a\, b$$

est un difféomorphisme sur son image et que $A'B \cap H = B$.

b) Soit $C \subset G$ un voisinage de e tel que $C^{-1}C \subset A'\, B$. Montrer que pour $a_1, a_2 \in A' \cap C$ et $h_1, h_2 \in H$, l'égalité

$$a_1 h_1 = a_2 h_2$$

entraîne que $a_1 = a_2$ et $h_1 = h_2$.

c) Soit $A = A' \cap C$. Montrer que l'application

$$A \times H \to AH \, , \; (a, h) \mapsto ah$$

est un difféomorphisme. Déduire que AH et $\pi(A) \subset G/H$ sont des ouverts et que π induit un homéomorphisme de A sur $\pi(A)$.

d) Pour $g \in G$, on définit la section locale $s_g : \pi(gA) \to gA$ par $\pi \circ s_g = \mathbf{1}_{gA}$. On définit la carte φ_g de G/H par

$$\varphi_g : \pi(gA) \to \mathfrak{a}\ ,\ \varphi_g = \exp^{-1} \circ L_{g^{-1}} \circ s_g .$$

Montrer que les cartes φ_g, $g \in G$, sont compatibles deux à deux.

e) Conclure.

f) Montrer que $SU(n)$ est simplement connexe et que $\pi_1(U(n)) = \mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 1$.

Rappels de Géométrie

Submersions. Soit $\varphi : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés. Supposons que φ est une *submersion*, c'est-à-dire que l'application

$$T_m\varphi : T_mM \to T_{\varphi(m)}N$$

est surjective en tout point m de M. Alors le théoème des fonctions implicites entraîne que pour tout point m de M, il existe un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_p)$ définies au voisinage de m et un système de coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_q)$ définies au voisinage de $\varphi(m)$ tels que $q \leq p$ et

$$y_i(\varphi(m')) = x_i(m')\ ,\ 1 \leq i \leq q\ ,$$

pour tout point m' au voisinage de m (localement, φ est une projection linéaire). Il s'ensuit que l'application φ est ouverte. Supposons qu'elle est en outre surjective. Alors une fonction f définie sur un ouvert U de N est différentiable si et seulement si $f \circ \varphi$ est différentiable. En particulier, la structure de variété de N est alors déterminée par celle de M et par φ.

Fibrés localement triviaux. Un fibré localement trivial est la donnée d'une application différentiable $\varphi : M \to N$ et d'une variété différentiable F telle que tout point n de N admet un voisinage ouvert U tel qu'il existe un difféomorphisme ψ de $\varphi^{-1}(U)$ sur $U \times F$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ U & \xrightarrow{\mathbf{1}} & U \end{array}$$

Dans un fibré localement trivial, l'application φ est une submersion surjective. Tout revêtement de variétés est un fibré localement trivial de fibre discrète. Tout fibré vectoriel est un fibré localement trivial.

Soit $\varphi : M \to N$ un fibré localement trivial de fibre F. Supposons M, N et F connexes. Alors on a une suite exacte de groupes

$$\pi_1(F) \to \pi_1(M) \to \pi_1(N) \to 1.$$