existe $w \in W$ t.q. $w(\alpha) \in S$. Donc on a une décomp. du même type (mais pas avec les mêmes ss-modules !) pour tout s_α.

Bases de Weyl

Soient $\mathfrak{g}$ une alg. de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ une ss-alg. de Cartan, $n = \dim \mathfrak{h} = rg\, \mathfrak{g}$. Soient $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base de R. Pour $1 \leq i \leq n$, posons $H_i = H_{\alpha_i}$ (la coracine de $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$) et choisissons $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$ et $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ tels que $[X_i, Y_i] = H_i$.

Posons
$$n(i,j) = \alpha_j(H_i) = \langle \alpha_i^*, \alpha_j \rangle, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Alors les $n(i,j)$ forment la matrice de Cartan du système R. Rappelons que $n(i,j)$ est un entier ≤ 0 si $i \neq j$. Posons

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^-} \mathfrak{g}^\alpha$$

de façon que
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-.$$

Thm : a) $\mathfrak{n}$ est engendré par les X_i, $\mathfrak{n}^-$ par les Y_i et $\mathfrak{g}$ par les H_i, X_i et Y_i.

b) Ces éléments vérifient les relations de Weyl

$$[H_i, H_j] = 0$$
$$[X_i, Y_i] = H_i \quad , \quad [X_i, Y_j] = 0, \ \forall i \neq j$$
$$[H_i, X_j] = n(i,j)\, X_j \, , \quad [H_i, Y_j] = -n(i,j)\, Y_j$$

et les relations de Serre

$$\mathrm{ad}(X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j) = 0 \quad , \quad i \neq j.$$
$$\mathrm{ad}(Y_i)^{-n(i,j)+1}(Y_j) = 0 \quad , \quad i \neq j.$$

Rques : 1) On peut montrer que ces générateurs et relations forment une présentation de $\mathfrak{g}$ (i.e. toute autre relation est conséquence de celles-ci).

2) On peut montrer que si l'on part d'un système de racines réduit R et que l'on <u>définit</u> $\mathfrak{g}$ par les générateurs et relations du Thm, alors $\mathfrak{g}$ est semi-simple de système de racines R.

On obtient ainsi une bijection

$$\{\text{syst. de racines réduits}\}/\text{isom.} \simeq \{\text{alg. de Lie ss.} \neq 0\}/\text{isom.}$$

Dém du Thm. : a) Il suffit de montrer que $\mathfrak{n}$ est engendré par les X_i. Soit $\alpha \in R^+$. On sait qu'on peut écrire α comme somme de racines simples

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}$$

de telle façon que les sommes partielles

$$\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_h}$$

appartiennent à R^+ pour tout $h \leq k$, et choisissons une telle décomposition et posons

$$X_\alpha = \operatorname{ad} X_{i_k} \operatorname{ad} X_{i_{k-1}} \dots \operatorname{ad} X_{i_2} (X_{i_1}).$$

Par le Thm. 1, X_α est un élément non nul de $\mathfrak{g}^\alpha$. Comme $\mathfrak{n}$ est la somme des $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in R^+$, cela montre que $\mathfrak{n}$ est bien engendré par les X_i.

b) On a $[X_i, X_j] = 0$ car $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}^{\alpha_i - \alpha_j}$ qui s'annule car $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas une racine. (toute racine est comb. lin. de racines simples avec des coeff. qui ont tous le <u>même</u> signe).
Les autres relations sont claires.

c) L'élément $\theta_{ij} = (\operatorname{ad} X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j)$ est dans $\mathfrak{g}^\beta$, où

$$\beta = \alpha_j - n(i,j)\alpha_i + \alpha_i$$
$$= s_i(\alpha_j - \alpha_i)$$

où $s_i = s_{\alpha_i}$. Comme $\alpha_j - \alpha_i$ n'est pas une racine, β ne l'est pas non plus.

De même pour la deuxième relation. ✓

Thm d'unicité : L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est présentée par les générateurs H_i, X_i, Y_i, $1 \leq i \leq n$, les relations de Weyl et les relations de Serre. Elle donc déterminée par R.

Thm d'existence : Soit R un système de racines réduit de base $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et de matrice de Cartan $n(i,j) = \langle \alpha_i^*, \alpha_j \rangle$, $1 \leq i,j \leq n$. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie complexe présentée par les $3n$ générateurs H_i, X_i, Y_i, $1 \leq i \leq n$, les relations de Weyl et les relations de Serre. Alors $\mathfrak{g}$ est semi-simple et si $\mathfrak{h} = \bigoplus \mathbb{C}H_i$, on a $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = R$.

But : Démontrer ces théorèmes.

Correction : Décomposition de $\mathfrak{g}$ sous s_α

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ une ss-algèbre de Cartan, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines associé. On fixe une racine $\alpha \in R$. Il lui est associé une ss-algèbre $s_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$ isomorphe à $sl_2(\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{g}$ devient un s_α-module via la représentation adjointe. On cherche à décomposer ce module en ss-modules simples. Soit β une racine non proportionnelle à α. Soit p resp. q le plus grand entier t.q. $\beta - p\alpha$ est une racine resp. $\beta + q\alpha$ est une racine. Alors $\beta + k\alpha$ est une racine pour $-p \leq k \leq q$ et on appelle

$$C = \{\beta - p\alpha, \beta - (p-1)\alpha, \dots, \beta + q\alpha\}$$

la <u>α-chaîne</u> passant par β. Alors

$$E_C = \mathfrak{g}^{\beta - p\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\beta - (p-1)\alpha} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{\beta + q\alpha}$$

est un s_α-ss-module simple de dimension $p + q + 1$.

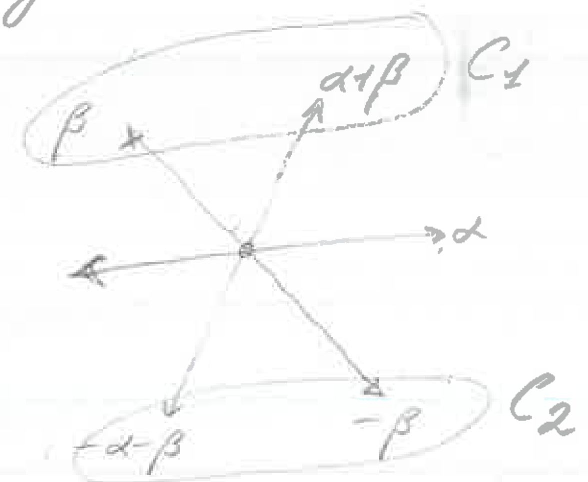
Lemme : On a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \ker(\alpha) \oplus \mathfrak{s}_\alpha \oplus \bigoplus_{C\ \alpha\text{-chaîne}} E_C$$

où $\mathfrak{s}_\alpha$ (avec la représ. adjointe) et les E_C sont des $\mathfrak{s}_\alpha$-modules simples et $\ker(\alpha)$ est une somme de copies de la représ. triviale.

Dém. : Clairement $\ker(\alpha)$, $\mathfrak{s}_\alpha$ et les E_C sont des $\mathfrak{s}_\alpha$-ss-modules de $\mathfrak{g}$. Leur somme contient $\mathfrak{h} = \mathbb{C} H_\alpha \oplus \ker(\alpha)$ et tous les $\mathfrak{g}^\beta$, où $\beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$. Clairement la somme est directe. ✓

Exemples : 1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Alors R est du type A_2 :



On a

$$\mathfrak{g} \cong \mathbb{C} \oplus \mathfrak{s}_\alpha \oplus E_{C_1} \oplus E_{C_2}$$
$$\cong V_0 \oplus V_2 \oplus V_1 \oplus V_1 \quad \text{(dimension 8)}$$

où V_m est le sl_2-module simple de dim. $m+1$.

2) $\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{h} = D_n(\mathbb{C}) \cap sl_n(\mathbb{C})$. Alors

$$R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\alpha_{ij} \mid i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq n\}$$

où $\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ et $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_i$.

Alors R est un système de racines dans

$$V = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{R}\cdot\alpha \cong \{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$$

et $S = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-1,n}\}$ en est une base. Le diagramme de Dynkin associé est

A_{n-1} : 

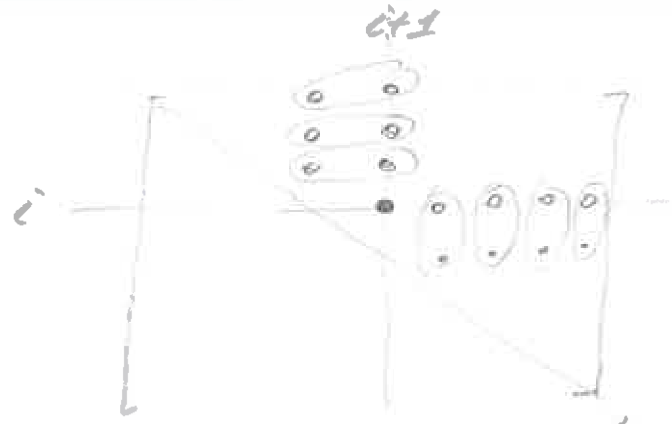
Les racines positives sont exactement les α_{ij}, où $i<j$. La somme d'une racine pos. et d'une racine nég. n'est jamais une racine. La somme $\alpha_{ij} + \alpha_{kl}$ de deux racines positives est une racine ssi $j=k$ ou $l=i$. Fixons $1 \leq i \leq n-1$. Les $\alpha_{i,i+1}$-chaînes de longueur 2 sont

$\{\alpha_{1,i}, \alpha_{1,i+1}\}, \{\alpha_{2,i}, \alpha_{2,i+1}\}, \ldots, \{\alpha_{i-1,i}, \alpha_{i-1,i+1}\}$

et

$\{\alpha_{i+1,i+2}, \alpha_{i,i+2}\}, \{\alpha_{i+1,i+3}, \alpha_{i,i+3}\}, \ldots, \{\alpha_{i+1,n}, \alpha_{i,n}\}$.

Elles sont au nombre de $n-2$.



Les racines non proportionnelles à $\alpha_{i,i+1}$ et qui n'apparaissent pas dans ces chaînes de longueur 2 sont au nombre de $n(n-1)-2(n-2)-2$. Elles forment chacune une chaîne de longueur 1. On a

$$\mathfrak{g} = \ker(\alpha_{i,i+1}) \oplus \mathfrak{s}_{\alpha_{i,i+1}} \oplus \bigoplus_{c\ \alpha_{i,i+1}\text{-chaîne}} E_c$$

$$\cong V_0^{n-2} \oplus V_2 \oplus V_1^{n-2} \oplus V_0^{n(n-1)-2n+2}$$

$$\cong V_0^{n^2-2n} \oplus V_1^{n-2} \oplus V_2$$

ce qui fait bien une dimension totale de n^2-1.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit k un corps. On note $\otimes = \otimes_k$.

Soit V un espace vectoriel.

Déf. : Pour $n \geq 0$, on pose $T^n V = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{n \text{ facteurs}}$.

L'algèbre tensorielle sur V est

$$TV = \bigoplus_{n \geq 0} T^n V$$

munie de la multiplication donnée par la concaténation

$$T^p V \otimes T^q V \longrightarrow T^{p+q} V$$

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q$$

Rque : Si $(X_i)_{i \in I}$ est une base de V, alors les monômes $X_{i_1} \cdots X_{i_n}$, $i_j \in I$, $n \geq 0$, forment une base de TV. On a un isom. $k\langle T_i \mid i \in I \rangle \to TV$, $T_i \mapsto X_i$

Lemme : Soient A une algèbre associative unifère et FA l'espace vectoriel sous-jacent. Pour toute appl. lin. $f : V \to FA$, il existe un unique morph. d'alg. unifères $\varphi : TV \longrightarrow A$ qui étend f.

On a donc

$$\mathrm{Hom}_{alg}(TV, A) \simeq \mathrm{Hom}_k(V, FA),$$

Dém. : On pose

$$\varphi(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_1) \dots f(v_n), \quad n \geq 0$$

et c'est la seule possibilité. ✓

(1)

Déf. : L'<u>algèbre symétrique</u> est le quotient SV de TV par l'idéal bilatère engendré par les différences $uv - vu$, $u, v \in V$.

Rque : Si $(X_i)_{i \in I}$ est une base de V, alors on a un isomorphisme canonique

$$k[T_i \mid i \in I] \xrightarrow{\sim} SV, \quad T_i \longmapsto V_i$$

Soit $\leq$ un ordre total sur I. Alors les monômes ordonnés $X_{i_1} \dots X_{i_n}$, $i_1 \leq \dots \leq i_n$, $n \in \mathbb{N}$, forment une base de SV.

Lemme : Soit A une alg. assoc., unifère et <u>commutative</u>. Alors toute appl. lin.

$$f : V \longrightarrow FA$$

s'étend en un unique morph. d'alg. unifères $\varphi : SV \longrightarrow A$.

Dém. : On étend $f : V \to FA$ en $\psi : TV \to A$.

①

Rque : Soit $\iota : V \longrightarrow B$ une appl. lin. vers une alg. assoc. unifère B t.q.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\forall f \text{ morph. d'espaces vect.}"] & \\ B \arrow[r, dashed, "\exists 1\, \varphi"', "\text{morph. d'alg.}"'] & A \end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique isom. $\varphi : TV \longrightarrow B$ t.q.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "can"'] \arrow[dr, "\iota"] & \\ TV \arrow[rr, "\varphi", "\simeq"', shift left] & & B \arrow[ll, dashed, "\psi", shift left] \end{tikzcd}$$

$\varphi \circ \psi = 1\!\!1_B$, $\psi \circ \varphi = 1\!\!1_{TV}$ (restrictions à V)

Donc le morphisme $can : V \longrightarrow TV$ est caractérisé par sa propriété universelle à un isomorphisme unique près.

On verra beaucoup d'autres exemples de telles propriétés universelles.

Comme A est commutative, on a

$$\varphi(uv - vu) = 0, \quad \forall u, v \in V.$$

Donc $\varphi : TV \to A$ induit $\varphi : SV \to A$. ✓

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

Déf. : L'<u>algèbre enveloppante</u> (universelle) de $\mathfrak{g}$ est le quotient $U\mathfrak{g}$ de $T\mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère engendré par les

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Rque : Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, on a $U\mathfrak{g} = S\mathfrak{g}$.

Notation : On note $\sigma : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ la composée $\mathfrak{g} \to T\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$.

Lemme : Soient A une alg. assoc. unifère et A_{Lie} l'algèbre de Lie d'espace ss-jacent A et de crochet

$$[a, b] = ab - ba, \quad a, b \in A.$$

Pour tout morph. d'alg. de Lie

$$f : \mathfrak{g} \longrightarrow A_{Lie},$$

il existe un unique morph. d'alg. unifères

$$\varphi : U\mathfrak{g} \longrightarrow A.$$

t.q. $\varphi \circ \sigma = f$. On a

$$\mathrm{Hom}_{alg}(U\mathfrak{g}, A) \simeq \mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, A_{Lie}).$$

Dém. : $f : \mathfrak{g} \to A_{Lie}$ s'étend en $\psi : T\mathfrak{g} \to A$ et on a

$$\psi(X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y])$$
$$= f(X)f(Y) - f(Y)f(X) - f([X,Y]) = 0$$

pour $X, Y \in \mathfrak{g}$ car f est un morph. d'alg. de Lie. Donc ψ induit $\varphi : U\mathfrak{g} \to A$. ✓

Rque : L'idéal bilatère $I \triangleleft T\mathfrak{g}$ engendré par les $X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, contient bcp d'éléments avec une compos. non nulle ds $\mathfrak{g}$.

Corollaire : Pour tte représ. $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ d'alg. de Lie, il existe une unique représ. $\varphi : U\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ d'alg. associatives t.q. $\varphi\circ\sigma = \rho$.
On obtient ainsi un <u>isomorphisme</u> de catégories $\mathfrak{g}\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} U\mathfrak{g}\text{-Mod}$.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de $\mathfrak{g}$ et $\leq$ un ordre total sur I. On note $y_i = \sigma(x_i)$, $i \in I$.

Thm (Poincaré-Birkhoff-Witt) : Les monômes ordonnés $y_{i_1} \cdots y_{i_n}$, $i_1 \leq \cdots \leq i_n$ dans I, $n \in \mathbb{N}$, forment une base de $U\mathfrak{g}$.

Cor. : L'application $\sigma : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ est injective.

Notation : Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $U_p\mathfrak{g}$ l'image de $T^0\mathfrak{g} \oplus \dots \oplus T^p\mathfrak{g}$ dans $U\mathfrak{g}$.

Lemme : Soient $a_1, \dots, a_p \in \mathfrak{g}$ et $\pi \in \mathfrak{S}_p$. Alors

$$\sigma(a_1) \dots \sigma(a_p) - \sigma(a_{\pi(1)}) \dots \sigma(a_{\pi(p)}) \in U_{p-1}\mathfrak{g}.$$

Dém. : Il suffit de montrer l'affirmation quand π est une transposition $(j\ j+1)$. Alors elle résulte de l'égalité

$$\sigma(a_j)\sigma(a_{j+1}) - \sigma(a_{j+1})\sigma(a_j) = \sigma([a_j, a_{j+1}]).$$ ✓

Notation : Pour une suite $J = (j_1, \dots, j_p)$ d'éléments de I, on pose $y_J = y_{j_1} \dots y_{j_p} \in U_p\mathfrak{g}$.

Lemme : Quand J parcourt les suites croissantes de longueur $\leq p$, les y_J engendrent l'espace vectoriel $U_p\mathfrak{g}$.

Dém. : Clairement, $U_p\mathfrak{g}$ est engendré par les y_J, où J parcourt <u>toutes</u> les suites de longueur $\leq p$. Par récurrence sur p, l'affirmation résulte du Lemme précédent. ✓

Soit $P = k[z_i \mid i \in I]$. Pour $p \geq 0$, soit P_p le ss-espace des polynômes de degré $\leq p$.
Pour une suite $J = (j_1, \dots, j_p)$ d'éléments de I, on écrit $i \leq J$ si $i \leq j_\ell$, $\forall \ell$, et on pose

$$z_J = z_{j_1} \cdots z_{j_p}.$$

Lemme : Pour tout $p \geq 0$, il existe une unique appl. linéaire $f_p : \mathfrak{g} \otimes P_p \longrightarrow P$ telle que

(A_p) $f_p(x_i \otimes z_J) = z_i z_J$ pour $i \leq J$, $z_J \in P_p$,

(B_p) $f_p(x_i \otimes z_J) - z_i z_J \in P_q$ pour $z_J \in P_q$, $q \leq p$,

(C_p) $f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_J)) = f_p(x_j \otimes f_p(x_i \otimes z_J)) + f_p([x_i, x_j] \otimes z_J)$

pour $z_J \in P_{p-1}$ (les termes ont un sens grâce à B_p).

En outre, la restriction de f_p à $\mathfrak{g} \otimes P_{p-1}$ est f_{p-1}.

Rque : Le lemme va nous donner une représentation $\mathfrak{g} \longrightarrow End(P)$ qui induit $U\mathfrak{g} \xrightarrow[\varphi]{} End(P)$ t.q. les $\varphi(y_J)$ sont lin. indép.

Dém. du Lemme : Pour $p = 0$, la condition (A_0) impose $f_0(x_i \otimes 1) = z_i$ et les conditions (B_0) et (C_0) sont alors satisfaites. Supposons que $p > 0$ et que f_{p-1} existe et est unique. Si f_p existe, alors

$f_p|\mathfrak{g}\otimes P_{p-1}$ vérifie $(A_{p-1}), (B_{p-1}), (C_{p-1})$ et est donc égal à f_{p-1}. Il s'agit donc de montrer que f_{p-1} admet une et une seule extension linéaire à $\mathfrak{g}\otimes P_p$ qui vérifie $(A_p), (B_p), (C_p)$.

Il faut définir $f_p(x_i\otimes z_J)$ pour une suite croissante J à p éléments. Si $i\leq J$, la condition (A_p) impose $f_p(x_i\otimes z_J) = z_i z_J$.

Si non, on a $J=(j,K)$ où $i>j$ et $j\leq K$.

Alors on a

$$f_p(x_i\otimes z_J) = f_p(x_i\otimes f_{p-1}(x_j\otimes z_K)) \quad \text{par } (A_{p-1})$$

$$= f_p(x_j\otimes f_{p-1}(x_i\otimes z_K)) + f_{p-1}([x_i,x_j]\otimes z_K) \quad \text{par } (C_p)$$

Or par (B_{p-1}), on a

$$f_{p-1}(x_i\otimes z_K) = z_i z_K + w$$

pour un $w\in P_{p-1}$. Donc

$$f_p(x_j\otimes f_{p-1}(x_i\otimes z_K)) = f_p(x_j\otimes(z_i z_K + w))$$

$$= z_j z_i z_K + f_{p-1}(x_j\otimes w) \quad \text{par } (A_p)$$

$$= z_i z_J + f_{p-1}(x_j\otimes w).$$

On trouve ainsi une unique extension linéaire f_p de f_{p-1} à $\mathfrak{g}\otimes P_p$ et par construction, elle vérifie (A_p) et (B_p).

Il reste à vérifier que f_p défini ainsi vérifie (C_p).
Par construction, (C_p) est vérifiée si $i \geq j$ et $j \leq J$.
Comme $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$, (C_p) est vérifiée aussi
si $i < j$ et $i \leq J$ (on récrit (C_p) sous la forme

$$f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_J)) - f_p(x_j \otimes f_p(x_i \otimes z_J)) = f_p([x_i, x_j] \otimes z_J).$$

Comme (C_p) est trivialement vérifiée pour $i = j$,
on trouve que (C_p) est vérifiée dès que $i \leq J$ ou $j \leq J$.
Dans le cas contraire, on peut supposer $J = (k, K)$,
où $k \leq K$ et $i > k$, $j > k$. Abrégeons

$$f_p(x \otimes z) =: xz, \quad x \in \mathfrak{g}, \; z \in P_p.$$

Alors, par l'hypothèse de récurrence, on a

$$(*) \quad x_j z_J = x_j(x_k z_K) = x_k(x_j z_K) + [x_j, x_k] z_K$$

Or on a $x_j z_K = z_j z_K + w$ pour un $w \in P_{p-1}$.
On s'intéresse à l'image de $(*)$ par $x_i \cdot ?$.
On peut appliquer (C_p) à $x_i(x_k(z_j z_K))$
car $k < j$ et $k \leq K$, et on peut l'appliquer à
$x_i(x_k(w))$ par l'hypothèse de récurrence. Donc on
peut l'appliquer à $x_j z_K$. On trouve

$$x_i(x_j z_J) = x_i(x_k(x_j z_K)) + x_i([x_j, x_k] z_K)$$

$$= x_k(x_i(x_j z_K)) + [x_i, x_k](x_j z_K)$$

$$+ [x_j, x_k](x_i z_K) + [x_i, [x_j, x_k]] z_K.$$

sym. en i,j

En échangeant i et j on obtient

$$x_i(x_j z_J) - x_j(x_i z_J)$$
$$= x_k(x_i(x_j z_K)) - x_k(x_i(x_j z_K))$$
$$+ [x_i,[x_j,x_k]]z_K - [x_j,[x_i,x_k]]z_K \quad \text{(réc., Jac.)}$$
$$= x_k([x_i,x_j]z_K) + [[x_i,x_j],x_k]z_K$$
$$\text{(réc.)}$$
$$= [x_i,x_j](x_k z_K)$$
$$= [x_i,x_j]z_J . \quad \checkmark$$

Dém. du Thm de PBW : On a montré que les y_J, J suite croissante dans I, engendrent $U\mathfrak{g}$. Il reste à montrer qu'ils sont linéairement indépendants. Le lemme précédent nous donne une représentation $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(P)$ telle que

$$f(x_i)(z_J) = z_i z_J \quad \text{pour } i \leq J.$$

D'où un morphisme d'algèbres $\varphi : U\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(P)$.

On trouve que pour $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_p$ dans I, on a

$$\varphi(y_J)(1) = \varphi(y_{j_1} \cdots y_{j_p})(1)$$
$$= z_{j_1} \cdots z_{j_p} = z_J .$$

Comme les z_J sont lin. indép., les y_J le sont aussi. $\checkmark$

Convention : Désormais, on identifie $\mathfrak{g}$ avec son image dans $U\mathfrak{g}$.

Rappel : Pour $p \geq 0$, $U_p\mathfrak{g}$ est l'image de $\bigoplus_{i=0}^{p} T^i\mathfrak{g}$ dans $U\mathfrak{g}$. Clairement, on a

$$U_p\mathfrak{g} \cdot U_q\mathfrak{g} \subseteq U_{p+q}\mathfrak{g}$$

et $U\mathfrak{g} = \bigcup U_p\mathfrak{g}$.

Def : Pour $p \geq 0$, on pose $gr_p U\mathfrak{g} = U_p\mathfrak{g} / U_{p-1}\mathfrak{g}$.

On définit $gr\, U\mathfrak{g}$ comme l'espace $\bigoplus_{p\geq 0} gr_p(U\mathfrak{g})$ muni de la multiplication induite par les applications de mult.

$$U_p\mathfrak{g} \times U_q\mathfrak{g} \longrightarrow U_{p+q}\mathfrak{g}.$$

Rques : 1) $gr\, U(\mathfrak{g})$ est une algèbre commutative. En effet, on sait que pour $a_1, \ldots, a_p \in \mathfrak{g}$ et $\pi \in \mathfrak{S}_p$, on a

$$a_1 \ldots a_p - a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(p)} \in U_{p-1}\mathfrak{g}.$$

2) La composée

$$\mathfrak{g} \longrightarrow U_1(\mathfrak{g}) \longrightarrow gr\, U(\mathfrak{g})$$

s'étend d'après 1) en un morph. d'algèbres

$$j : S\mathfrak{g} \longrightarrow gr\, U(\mathfrak{g}).$$

Cor.: Le morphisme j est un isomorphisme.

Dém.: En effet, soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de $\mathfrak{g}$, où
I est totalement ordonné. On sait que les
$x_J = x_{j_1}\cdots x_{j_p}$, $J=(j_1,\dots,j_p)$ une suite croissante,
forment une base de $S^p\mathfrak{g}$. Par réc. sur p, il
résulte du thm de PBW que les images
$$j(x_J) = x_{j_1}\cdots x_{j_p} \text{ vu dans } U_p\mathfrak{g}$$
fournissent une base de $gr_p U\mathfrak{g} = U_p\mathfrak{g}/U_{p-1}\mathfrak{g}$. ✓

Algèbres de Lie libres

Soit V un espace vectoriel.

Déf.: Une <u>algèbre de Lie libre</u> sur V est
une appl. lin. $\lambda: V \longrightarrow LV$ vers une
algèbre de Lie L telle que toute appl.
linéaire $f: V \longrightarrow \mathfrak{g}$ vers une alg. de
Lie $\mathfrak{g}$ s'étend en un unique morph.
d'algèbres de Lie $\varphi: LV \longrightarrow \mathfrak{g}$ t.q. $\varphi\circ\lambda = f$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\forall f"'] & LV \arrow[dl, dashed, "\exists ! \varphi"] \\ \mathfrak{g} & \end{tikzcd}$$

Rques : 1) On a donc

$$\mathrm{Hom}_k(V, F\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Hom}_{Lie}(LV, \mathfrak{g})$$

où F désigne l'espace vectoriel sous-jacent.

2) Si $\lambda_i : V \longrightarrow L_iV$, $i=1,2$, sont deux algèbres de Lie libres, il existe un unique isom. $\varphi : L_1V \xrightarrow{\sim} L_2V$ t.q. $\varphi \circ \lambda_1 = \lambda_2$. L'algèbre de Lie libre est donc unique à un isom. unique près.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\lambda_1"'] \arrow[dr, "\lambda_2"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ L_1V \arrow[rr, "\varphi"] & & L_2V \arrow[ll, dashed, bend left, "\psi", "\sim"'] \end{tikzcd}$$

3) Si X est un ensemble, l'algèbre de Lie libre LX sur X est par définition l'algèbre de Lie libre sur l'espace vectoriel kX de base X.

On a

$$\mathrm{Hom}_{Ens}(X, F_{Ens}\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Hom}_k(kX, F\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Hom}_{Lie}(LX, \mathfrak{g}).$$

Thm : a) L'algèbre de Lie libre LV est la ss-algèbre de Lie de l'algèbre tensorielle TV engendrée par V.

b) L'inclusion $LV \longrightarrow TV$ induit un isomorphisme $U(LV) \xrightarrow{\sim} TV$.

Dém. : a) Soit LV la ss-alg. de Lie de TV engendrée par V. Soit $f : V \to \mathfrak{g}$ une appl. lin. vers une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La composée $V \to \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ induit un morphisme d'algèbres $g : TV \to U\mathfrak{g}$ qui envoie V vers $\mathfrak{g} \subseteq U\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g} \subseteq U\mathfrak{g}$ est stable par commutateurs, g envoie LV dans $\mathfrak{g}$. On a donc construit un morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : LV \to \mathfrak{g}$ qui clairement étend f. Comme LV est engendrée par V en tant qu'alg. de Lie f est unique. Ainsi $V \to LV$ est bien l'algèbre de Lie libre sur V.

b) Soit $LV \xrightarrow{f} A_{Lie}$ un morphisme d'algèbres de Lie vers l'algèbre de Lie associée à une algèbre associative unifère A. La composée $V \to LV \xrightarrow{f} A$ induit un morphisme d'algèbres $TV \xrightarrow{\varphi} A$ et la restriction de φ à LV est f car V engendre l'algèbre de Lie LV. Comme φ est déterminé de façon unique par sa restriction à V il est d'autant plus déterminé par sa restriction à LV. Donc $LV \to TV$ est l'alg. univ. de LV. ✓

Terminologie : Soient X un ensemble et $R \subseteq LX$ une partie de l'alg. de Lie libre LX. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est <u>présentée</u> par l'ens. de générateurs X et les relations R si l'on s'est donné un isomorphisme

$$LX/\langle R\rangle \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g},$$

où $\langle R\rangle$ est l'idéal de LX engendré par R.

10. Construction des algèbres de Lie semi-simples par générateurs et relations

Soit R un système de racines réduit de base $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et soit $n(i,j) = \langle \alpha_i^*, \alpha_j\rangle$, $1 \leq i,j \leq n$, la matrice de Cartan.

Thm : Soit $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie définie par les générateurs X_i, Y_i, H_i, $1 \leq i \leq n$, et les relations de Weyl :

$$[H_i, H_j] = 0, \ \forall i,j,$$
$$[X_i, Y_i] = H_i, \quad [X_i, Y_j] = 0, \ \forall i \neq j,$$
$$[H_i, X_j] = n(i,j) X_j, \quad [H_i, Y_j] = -n(i,j) Y_j, \ \forall i,j$$

Alors on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{x} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{y}$, où $\mathfrak{x}$ est la ss-alg. engendrée par les X_i, $\mathfrak{y}$ celle eng. par les Y_i et $\mathfrak{h}$ celle engendrée par les H_i.

En outre, les H_i forment une base (sur $\mathbb{C}$) de $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{X}$ est libre sur les X_i et $\mathcal{Y}$ libre sur les Y_i.

Dém. : Soit TV l'algèbre tensorielle sur $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} Z_i$ de façon qu'on a

$$TV \simeq \mathbb{C}\langle Z_1, \dots, Z_n\rangle$$
$$:= \{\text{polynômes non com. en } Z_1 \cdots Z_n\}.$$

1ère étape : On construit une représentation $\rho : \mathfrak{a} \to \mathrm{End}(TV)$.

Pour cela, pour $1 \leq i \leq n$, on définit des endomorphismes X_i°, Y_i°, H_i° de TV comme suit :
Pour un monôme $M = Z_{j_1} \cdots Z_{j_m}$, on pose

$$(1) \qquad Y_i^\circ M := Z_i M$$

$$(2) \qquad H_i^\circ M := -\left(\sum_{k=1}^{m} n(i, j_k)\right) \cdot M$$

et on définit $X_i^\circ M$ par récurrence sur m par

$$(3) \qquad X_i^\circ M := (Y_{j_1}^\circ X_i^\circ + \delta_{ij_1} H_i^\circ) Z_{j_2} \cdots Z_{j_m}$$

avec $X_i^\circ 1 := 0$.

Montrons que ces endomorphismes vérifient les relations imposées aux X_i, Y_i, H_i : en effet, la relation (3) s'écrit

$$X_i^\circ Y_{j_1}^\circ M' = Y_{j_1}^\circ X_i^\circ M' + \delta_{ij_1} H_i^\circ M'$$

où $M' = Z_{j_2} \cdots Z_{j_m}$. Il s'ensuit que

(4) $\quad [X_i^\circ, Y_i^\circ] = H_i^\circ \quad , \forall i,$

(5) $\quad [X_i^\circ, Y_j^\circ] = 0 \quad , \forall i \neq j.$

La relation $[H_i^\circ, H_j^\circ] \underset{(6)}{=} 0$, $\forall i,j$, est claire. On a

$$[H_i^\circ, Y_j^\circ] M = H_i^\circ Z_j M + \left(\sum_{k=1}^{m} n(i,j_k)\right) Z_j M$$
$$= -n(ij) Z_j M$$
$$= -n(ij) Y_j^\circ M$$

ce qui montre $[H_i^\circ, Y_j^\circ] \underset{(7)}{=} -n(ij) Y_j^\circ$. Finalement, on a

$$0 = [H_i^\circ, [X_j^\circ, Y_k^\circ]] \quad \text{par } (4),(5),(6)$$
$$= [[H_i^\circ, X_j^\circ], Y_k^\circ] + [X_j^\circ, [H_i^\circ, Y_k^\circ]]$$
$$= [[H_i^\circ, X_j^\circ], Y_k^\circ] - [X_j^\circ, n(ik) Y_k^\circ] \quad \text{par } (7)$$
$$= [[H_i^\circ, X_j^\circ] - n(ik) X_j^\circ, Y_k^\circ]$$
$$= [[H_i^\circ, X_j^\circ] - n(ij) X_j^\circ, Y_k^\circ] \quad \text{par } (5)$$
$$\underset{(8)}{=} [[H_i^\circ, X_j^\circ] - n(ij) X_j^\circ) \cdot 1 = 0$$

Or on a $([H_i^\circ, X_j^\circ] - n(ij) X_j^\circ) \cdot 1 = 0$

Par (8), il s'ensuit qu'on a

$$([H_i^\circ, X_j^\circ] - n(ij) X_j^\circ) Z_{k_1} \dots Z_{k_m} = 0$$

pour tous $k_1, \dots, k_m$. Cela montre bien que

$$[H_i^\circ, X_j^\circ] = n(ij) X_j^\circ \quad , \forall i,j.$$

On définit ρ en envoyant les X_i, Y_i, H_i sur $X_i^\circ, Y_i^\circ, H_i^\circ$.

2e étape : Les endom. X_i^0, Y_i^0, H_i^0, $1 \leq i \leq n$
sont lin. indép.

Comme $Y_i^0 \cdot 1 = z_i$, les Y_i^0 sont bien lin. indép.

Supposons que $\sum_{i=1}^{n} a_i H_i^0 = 0$. On a

$$0 = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i H_i^0, Y_j^0\right] = \sum_{i=1}^{n} -a_i n(ij) \cdot Y_j^0$$

pour tout $1 \leq j \leq n$. Comme la matrice de Cartan est inversible (sur $\mathbb{Q}$), il s'ensuit que $a_i = 0$, $\forall i$.

Supposons que $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^0 = 0$. Pour $1 \leq j \leq n$, on a

$$(\; Y_j^0 X_i^0 + \delta_{ij} H_i^0) \cdot 1 = 0$$

$$X_i^0 z_j \underset{(3)}{=} (\quad Y_j^0 X_i^0 + \delta_{ij} H_i^0) \cdot z_j = 2\delta_{ij} z_j$$

$$X_i^0 z_j z_j = (+Y_j^0 X_i^0 + \delta_{ij} H_i^0) \cdot z_j$$

Il s'ensuit que $a_i = 0$, $\forall i$. Finalement, il n'y a pas de relations linéaires entre les 3 groupes d'opérateurs, car les Y_i^0 envoient T^pV dans $T^{p+1}V$, les H_i^0 envoient T^pV dans T^pV et les X_i^0 envoient T^pV dans $T^{p-1}V$.

3e étape : Il existe un et un seul automorphisme involutif Θ de $\mathfrak{a}$ tel que
$\Theta(X_i) = Y_i$, $\Theta(Y_i) = X_i$, $\Theta(H_i) = -H_i$, $1 \leq i \leq n$.

Dém. : Les images par Θ des générateurs vérifient les relations. D'où l'existence d'un unique morphisme

$\Theta : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ aux images données. Comme Θ^2 envoie chaque générateur sur lui-même, on a $\Theta^2 = 1_{\mathfrak{A}}$. ✓

Déf. : Soient Q un groupe abélien et A une algèbre. Une Q-graduation sur A est une décomposition $A = \bigoplus_{q \in Q} A^q$ telle que $A^q A^r \subseteq A^{q+r}$ pour tous $q, r \in Q$.

4ᵉ étape : Soit $Q = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$. L'algèbre $\mathfrak{A}$ admet une Q-graduation telle que X_i, Y_i, H_i sont respectivement de degrés $\alpha_i, -\alpha_i$ et 0, $1 \leq i \leq n$.

Soit $W = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}X_i \oplus \mathbb{C}Y_i \oplus \mathbb{C}H_i$. L'espace W est naturellement Q-gradué et l'algèbre tensorielle TW hérite de cette graduation. La sous-algèbre de Lie $LW \subseteq TW$ engendrée par W hérite de cette graduation car ses générateurs X_i, Y_i, H_i sont homogènes. Les relations imposées aux X_i, Y_i, H_i sont également homogènes. Donc l'idéal engendré par les relations est la somme de ses composantes homogènes et le quotient $\mathfrak{A}$ hérite de la graduation.

5ᵉ étape : Pour $\mu \in Q$, on a $z \in \mathfrak{a}^\mu$ ssi

$$[H_i, z] = \langle \alpha_i^*, \mu \rangle z \quad (*)$$

pour tous $1 \leq i \leq n$.

Notons $a^{(\mu)}$ l'espace des $z \in \mathfrak{a}$ tels que $(*)$ est vrai.
La somme des $a^{(\mu)}$ est directe. Il suffit donc
de montrer que $a^\mu \subseteq \mathfrak{a}^{(\mu)}$. Soit $1 \leq i \leq n$.
L'endomorphisme $u : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ tel que

$$u|_{\mathfrak{a}^\mu} = \langle \alpha_i^*, \mu \rangle \cdot 1_{\mathfrak{a}^\mu}$$

est une dérivation (!) de $\mathfrak{a}$ telle que

$$u(x) = (\operatorname{ad} H_i)(x)$$

pour $x \in \{X_j, Y_j, H_j \mid 1 \leq j \leq n\}$. Or une dérivation
est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur les
générateurs. Donc $u = \operatorname{ad} H_i$.

6ᵉ étape : Soient $Q_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{N}\alpha_i$, $Q_- = -Q_+$,

$$\mathfrak{a}_+ = \bigoplus_{\mu \in Q_+} \mathfrak{a}^\mu, \quad \mathfrak{a}_- = \bigoplus_{\mu \in Q_-} \mathfrak{a}^\mu .$$

a) L'alg. de Lie $\mathfrak{a}_+$ est engendrée par les X_i.

b) —— $\mathfrak{a}_-$ —— Y_i.

c) Les H_i forment une base de $\mathfrak{a}^0$.

d) On a $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_- \oplus \mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}_+$.

Soient $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) la ss-alg. de Lie de $\mathfrak{a}$ engendrée
par les X_i (resp. les Y_i) et soit $\mathfrak{h}$ le ss-espace vect.
engendré par les H_i. Comme les X_i sont des

éléments homogènes de $\mathfrak{a}$, $\mathcal{X}$ est une ss-algèbre graduée de $\mathfrak{a}_+$. Par suite, on a $[\mathfrak{h}, \mathcal{X}] \subseteq \mathcal{X}$, de sorte que $\mathfrak{h} + \mathcal{X}$ est une ss-algèbre de $\mathfrak{a}$.

Comme

$$[Y_i, X_j] = -\delta_{ij} \cdot H_i$$

pour tous i, j, on a $[Y_i, \mathcal{X}] \subseteq \mathfrak{h} + \mathcal{X}$ pour tout i.

De même, $\mathcal{Y}$ est une ss-algèbre graduée de $\mathfrak{a}_-$, on a $[\mathfrak{h}, \mathcal{Y}] \subseteq \mathcal{Y}$, $\mathfrak{h} + \mathcal{Y}$ est une ss-algèbre de $\mathfrak{a}$ et $[X_i, \mathcal{Y}] \subseteq \mathfrak{h} + \mathcal{Y}$ pour tout i. Posons $\mathfrak{a}' = \mathcal{X} + \mathfrak{h} + \mathcal{Y}$. Ce qui précède montre que $\mathfrak{a}'$ est stable par $\mathrm{ad} H_i$, $\mathrm{ad} X_i$ et $\mathrm{ad} Y_i$ pour tout i. Donc $\mathfrak{a}'$ est un idéal de $\mathfrak{a}$. Comme il contient les X_i, Y_i, H_i $\forall i$, il est égal à $\mathfrak{a}$. Il s'ensuit que les inclusions $\mathcal{X} \subseteq \mathfrak{a}^+$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{a}^-$ et $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a}^0$ sont des égalités ce qui permet de conclure.

7e étape : L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_+$ (resp. $\mathfrak{a}_-$) est libre sur l'ensemble des X_i (resp. Y_i).

Soit LV la sous-algèbre de Lie de TV $(V = \bigoplus_{i=1} \mathbb{C} z_i)$ engendrée par V. Elle est libre sur V. Soit

$$\rho' : LV \longrightarrow \mathrm{End}(TV), \quad a \longmapsto (u \mapsto au).$$

Clairement ρ' est une représentation injective.

Soit $\varphi : LV \to \mathfrak{a}_-$ l'unique morphisme tel que

$\varphi(z_i) = y_i$. Alors $\rho(\varphi(z_i))$ (ρ défini à la première étape) est la multiplication à gauche par z_i, $\forall i$, de façon que

$$\rho' = \rho \circ \varphi.$$

Donc φ est injectif. Clairement φ est aussi surjectif de façon que φ est un isomorphisme et $\mathfrak{a}_-$ est libre sur l'ensemble des y_i.
Comme $\theta : \mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}$ (3e étape) envoie y_i sur x_i, $\mathfrak{a}_+$ est libre sur l'ensemble des x_i. ✓

1
Gardons les notations : R est un système de racines réduit de base $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $n(ij) = \langle \alpha_i^*, \alpha_j \rangle$ la matrice de Cartan.

Thm (existence) : Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie définie par les générateurs X_i, Y_i, H_i, $1 \leq i \leq n$, les relations de Weyl et les relations de Serre

θ_{ij} : $(\operatorname{ad} X_i)^{-n(ij)+1}(X_j) = 0$, $\forall i \neq j$,

θ_{ij}^- : $(\operatorname{ad} Y_i)^{-n(ij)+1}(Y_j) = 0$, $\forall i \neq j$.

Alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} H_i$ est une ss-algèbre de Cartan et le système de racines associé est R.

Dém. : Notons $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie définie par les générateurs X_i, Y_i, H_i et les relations de Weyl uniquement. On a vu au théorème précédent que

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{Y}$$

où $\mathfrak{X}$ est l'alg. de Lie libre sur les X_i et $\mathfrak{Y}$ l'alg. de Lie libre sur les Y_i. Posons

$$\theta_{ij} = (\mathrm{ad} X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j),$$

$$\theta_{ij}^- = (\mathrm{ad} Y_i)^{-n(i,j)+1}(Y_j), \quad i \neq j.$$

On a $\theta_{ij} \in \mathfrak{X}$ et $\theta_{ij}^- \in \mathfrak{Y}$. Notons $\mathfrak{u}$ resp. $\mathfrak{u}^-$ l'idéal de $\mathfrak{X}$ resp. $\mathfrak{Y}$ engendré par les θ_{ij} resp. les θ_{ij}^- et $\mathfrak{r} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}^-$.

1ère étape : $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}^-$ et $\mathfrak{r}$ sont des idéaux de $\mathfrak{a}$.

Notons $U\mathfrak{a}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$. La représentation adjointe $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{a})$ définit une structure de $U\mathfrak{a}$-module sur $\mathfrak{a}$. L'idéal $\mathfrak{u}_{ij}$ de $\mathfrak{a}$ engendré par θ_{ij} est égal à $U\mathfrak{a} \cdot \theta_{ij}$. Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, $\mathfrak{u}_{ij}$ est engendré, en tant qu'espace vectoriel, par les $XYH\theta_{ij}$, où $X \in U\mathfrak{X}$, $Y \in U\mathfrak{Y}$ et $H \in U\mathfrak{h}$. Clairement $H\theta_{ij}$ est proportionnel à θ_{ij}.

En outre, on a $\mathrm{ad}(Y_k)(\theta_{ij}) = 0$ d'après le lemme.

~~Pour $k \neq i$, on a $[Y_k, X_i] = 0$ et donc $[\mathrm{ad} Y_k, \mathrm{ad} X_i] = 0$.~~

~~Alors $[Y_k, \theta_{ij}] = [Y_k, (\mathrm{ad} X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j)] =$~~

(1)

Lemme : Soit V un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-module (de dim $< \infty$) et $v \in V$ un vecteur primitif de poids λ. (i.e. $v \neq 0$, $Ev = 0$ et $Hv = \lambda v$). Alors on a

$$EF^t v = t(\lambda - t + 1) F^{t-1} v \ , \ t \geq 0.$$

En particulier, on a $EF^t v = 0$ si $t = \lambda - 1$. De même, si v est un vecteur coprimitif de poids λ, on a

$$FE^t v = t(\lambda + t - 1) F^{t-1} v, \ t \geq 0.$$

Dém. : On procède par récurrence sur t. Pour $t=0$, on a bien $Ev = 0$. Soit $t > 0$. Notons que $F^{t-1}v$ est de poids $\lambda - 2t + 2$. On a

$$EF^t v = EFF^{t-1}v = [E,F]F^{t-1}v + FEF^{t-1}v$$

$$\underset{\text{hyp. de réc.}}{=} HF^{t-1}v + F \cdot (t-1)(\lambda - t + 2) F^{t-2} v$$

$$= \left((\lambda - 2t + 2) + (t-1)(\lambda - t + 2) \right) F^{t-1} v$$

$$= t(\lambda - t + 1) \cdot F^{t-1} v.$$

La dém. de la deuxième partie est analogue. ✓

Dans la situation du Thm, posons

$$\theta_{ij}^{+} = (\mathrm{ad}\, X_i)^{-n(ij)+1}(X_j)$$

$$\theta_{ij}^{-} = (\mathrm{ad}\, Y_i)^{-n(ij)+1}(Y_j) \quad \text{pour } i \neq j.$$

Lemme : Dans l'algèbre $\mathfrak{a}$ présentée par les X_i, Y_i, H_i, $1 \leq i, j \leq n$, et les relations de Weyl, on a

$$\operatorname{ad} X_k (\theta_{ij}^-) = 0 \text{ et } \operatorname{ad} Y_k (\theta_{ij}^+) = 0$$

pour tous $1 \leq k \leq n$ et $i \neq j$.

Dém. : On montre la première égalité.

1er cas : $k \neq i$.

Alors $[X_k, Y_i] = 0$ et donc $\operatorname{ad} X_k$ et $\operatorname{ad} Y_i$ commutent. Donc

$$\operatorname{ad} X_k (\operatorname{ad} Y_i)^{-n(ij)+1} (Y_j) = (\operatorname{ad} Y_i)^{-n(ij)+1} [X_k, Y_j]$$

Si $k = j$, on trouve $[X_k, Y_j] = H_j$. Or on a $\operatorname{ad} Y_i (H_j) = n(j,i) \cdot Y_i$. Si $n(j,i) \neq 0$, alors $n(ij) \neq 0$ et $-n(ij) + 1 \geq 2$. Donc $(\operatorname{ad} Y_i)^{-n(ij)+1} (Y_j) = 0$.

Si $k \neq j$, alors $[X_k, Y_j] = 0$.

2e cas : $k = i$.

Grâce aux relations de Weyl, l'application $sl_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{a}$, $E \mapsto X_i$, $H \mapsto H_i$, $F \mapsto Y_i$ est un morphisme d'alg. de Lie. Par composition avec la représentation adjointe, $\mathfrak{a}$ devient un module sur $sl_2(\mathbb{C})$. Comme $[X_i, Y_j] = 0$, Y_j est un vecteur primitif de poids $-n(ij)$. Donc $E^{-n(ij)+1} \cdot Y_j = 0$ par le lemme précédent. ✓

$$= (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)+1} [Y_k, X_j] = -\delta_{kj} (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)+1} (H_j)$$

Si $k \neq j$, on trouve 0. Sinon, on trouve

$$+ (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)} [H_j, X_i] = n(j,i) \cdot (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)} (X_i)$$

Si $n(ij) = 0$, alors $n(j,i) = 0$ et on trouve 0.

Si $n(ij) < 0$, alors $(\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)} (X_i) = 0$ et on trouve 0.

Supposons maintenant $k = i$. Alors

$$[Y_i, \theta_{ij}] = [Y_i, (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)+1} (X_j)]$$

Nous avons la formule, valable dans toute algèbre associative :

$$XA^k = A^k X - \binom{k}{1} A^{k-1} X' + \binom{k}{2} A^{k-2} X'' + \dots,$$

où $X' = [X, A]$, $X'' = [X', A]$, ... (exercice !).

Nous l'appliquons à $X = \mathrm{ad} Y_i$ et $A^k = (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)+1}$.

Nous trouvons

$$X' = [X, A] = \mathrm{ad} [Y_i, X_i] = -\mathrm{ad} H_i$$

$$X'' = [X', A] = -[\mathrm{ad} H_i, \mathrm{ad} X_i] = -\mathrm{ad} [H_i, X_i]$$

$$= -2\, \mathrm{ad} X_i$$

$$X''' = [X'', A] = -2 [\mathrm{ad} X_i, \mathrm{ad} X_i] = 0.$$

Donc

$$\mathrm{ad} Y_i (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)+1} (X_j) = (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)+1} (\mathrm{ad} Y_i)(X_j)$$

$$- (-n(ij)+1) (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)} (\mathrm{ad} H_i)(X_j) \quad \text{si } n(ij) = 0$$

$$\mathrm{ad} Y_i (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)+1} (X_j) = (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)+1} (\mathrm{ad} Y_i)(X_j)$$

$$- (-n(ij)+1)(\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)} (\mathrm{ad} H_i)(X_j) + \tfrac{1}{2} (-n(ij)+1)(-n(ij)) (\mathrm{ad} X_i)^{-n(ij)-1} \cdot (-2)(\mathrm{ad} X_i)(X_j) \quad \text{si } n(ij) < 0.$$

~~Dans les deux cas, le premier terme s'annule car~~
~~$[Y_i, X_j] = 0$. Si $n(ij) = 0$, on a~~

$$[H_i, X_j] = n(ij) X_j = 0$$

~~et la première formule donne 0. Si $n(ij) < 0$,~~
~~on utilise $[H_i, X_j] = n(ij) X_j$ pour obtenir~~

$$(-n(ij)+1)\, n(ij)\, (\mathrm{ad}\, X_i)^{-n(ij)} (X_j) + (-n(ij)+1) \cdot n(ij) \cdot (\mathrm{ad}\, X_i)^{-n(ij)} (X_j) = 0.$$

L'égalité $(\mathrm{ad}\, y_k)(\theta_{ij}) = 0$ montre que $y\theta_{ij}$
est proportionnel à θ_{ij} si $y \in UY$. Donc l'idéal
u_{ij} est engendré par les $X\theta_{ij}$ et donc contenu dans $\mathcal{X}$.
On a $u = \sum u_{ij}$ ce qui montre que u est effective-
ment un idéal de $\mathfrak{a}$. Le même argument s'applique
à u^-. Le résultat pour r s'ensuit.
Ainsi r est le plus petit idéal de $\mathfrak{a}$ contenant les θ_{ij}
et $\mathfrak{g}$ est le quotient de $\mathfrak{a}$ par r.

2e étape : On a $\mathfrak{g} = n^- \oplus \mathfrak{h} \oplus n$, où $n^- = \mathcal{Y}/u^-$
et $n = \mathcal{X}/u$.

C'est évident.

3e étape : Les endomorphismes $\mathrm{ad} X_i$ et $\mathrm{ad} Y_i$
de $\mathfrak{g}$ sont localement nilpotents.

Rappelons qu'un endomorphisme $f : V \to V$ est loc. nilp.
si pour tout $v \in V$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $f^N v = 0$.

Soit V_i l'ensemble des $Z \in \mathfrak{g}$ tels que $(\mathrm{ad} X_i)^k(Z) = 0$ pour un $k \geq 0$. Il s'agit de montrer que $V_i = \mathfrak{g}$. Un calcul déjà bien connu montre que V_i est une ss-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Comme V_i contient les éléments X_k (par les relations $\theta_{ij} = 0$) et les Y_k (par les relations de Weyl), il contient les $H_k = [X_k, Y_k]$ et donc $V_i = \mathfrak{g}$. Le même argument s'applique à $\mathrm{ad} Y_i$.

Rappelons de la démonstration du thm précédent qu'on a une décomposition

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{\lambda \in Q} \mathfrak{a}^\lambda, \quad Q = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$$

$$\mathfrak{X} = \bigoplus_{\lambda \in Q_+} \mathfrak{a}^\lambda, \quad Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\alpha_i$$

$$\mathcal{Y} = \bigoplus_{\lambda \in Q_-} \mathfrak{a}^\lambda, \quad Q_- = -Q_+.$$

$$\mathfrak{a}^\lambda = \{ Z \in \mathfrak{a} \mid (\mathrm{ad} H)(Z) = \lambda(H) Z, \ \forall H \in \mathfrak{h} \}.$$

Les relations θ_{ij} et θ_{ij}^- sont homogènes pour cette graduation de façon que $\mathfrak{g}$ hérite d'une graduation

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in Q} \mathfrak{g}^\lambda, \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in Q_+} \mathfrak{g}^\lambda, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\lambda \in Q_-} \mathfrak{g}^{-\lambda},$$

On va déterminer $\dim \mathfrak{g}^\lambda$ pour tout $\lambda \in Q$.

4ᵉ étape : Si $\lambda = w\mu$ pour un $w \in W$, alors $\dim \mathfrak{g}^\lambda = \dim \mathfrak{g}^\mu$.

Il suffit de le montrer si w est la symétrie s_i de vecteur une racine simple α_i. Dans ce cas, on définit un automorphisme θ_i de $\mathfrak{g}$ par

$$\theta_i = e^{\operatorname{ad} X_i} e^{-\operatorname{ad} Y_i} e^{\operatorname{ad} X_i}$$

Comme les $\operatorname{ad} X_i$ et $\operatorname{ad} Y_i$ sont localement nilpotents, θ_i est bien défini. On vérifie facilement que θ_i induit la symétrie s_i dans $\mathfrak{h}^*$ et envoie donc $\mathfrak{g}^\lambda$ sur $\mathfrak{g}^\mu$ si $\mu = s_i(\lambda)$. Donc $\dim \mathfrak{g}^\lambda = \dim \mathfrak{g}^\mu$.

5ᵉ étape : On a $\dim \mathfrak{g}^{\alpha_i} = 1$ et $\dim \mathfrak{g}^{m\alpha_i} = 0$ pour $m \notin \{-1, 0, 1\}$.

Clairement on a $\dim \mathcal{X}^{\alpha_i} = 1$ et $\dim \mathcal{X}^{m\alpha_i} = 0$ pour $m \notin \{-1, 0, -1\}$. Comme $X_i \notin \mu$, l'affirmation en résulte.

6ᵉ étape : Soit $\lambda \in \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}\alpha_i = V$. Supposons que λ n'est pas multiple d'une racine. Alors il existe $w \in W$ t.q. $w(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i$, où $t_i < 0$ pour au moins un i et $t_i > 0$ pour au moins un i.

Soit $L_\alpha \subseteq V^*$ l'hyperplan orthogonal à une racine α et $L \subseteq V^*$ l'hyperplan orthogonal à λ. Par hypothèse, on a $L \neq L_\alpha$ pour tout $\alpha \in R$. Donc L n'est pas contenu dans la réunion des L_α, $\alpha \in R$. Soit $v^* \in V^*$ un élément de L en dehors de tous les L_α.

Or on sait que pour tout $t \in V^*$, il existe $w \in W$ tel que $\langle w(t), \alpha_i \rangle \geq 0$, $\forall i$ (transitivité de l'action de W sur l'ensemble des chambres de Weyl). Il existe donc $w \in W$ t.q. $\langle w(v^*), \alpha_i \rangle > 0$ pour tout i. Si on écrit $w(\lambda) = \sum t_i \alpha_i$, on trouve

$$0 = \langle v^*, \lambda \rangle = \langle w(v^*), w(\lambda) \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} t_i \underbrace{\langle w(v^*), \alpha_i \rangle}_{>0}.$$

Posons $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = V^*$ et notons que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{h}$.

7e étape : Si λ n'est pas une racine et $\lambda \neq 0$, alors $\mathfrak{g}^\lambda = 0$.

On peut supposer que λ est une comb. lin. à coeff. entiers des racines simples. Si λ est multiple d'une racine, l'affirmation résulte des étapes 4 et 5. Sinon, par l'étape 6, il existe $w \in W$ tel que $\mu = w(\lambda)$ est comb. lin. des α_i avec des coeff. >0 et <0. Alors on a $\mathfrak{g}^\mu = 0$ donc $\mathfrak{g}^\mu = 0$ et $\mathfrak{g}^\lambda = 0$ par l'étape 4.

8e étape : L'algèbre de Lie est de dimension finie égale à $n + |R|$.

En effet, par les étapes 5 et 7, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$$

et chaque $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1.

9e étape : Pour $\alpha \in R$, l'espace $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ est formé des multiples de $H_\alpha = \alpha^*$. La sous-algèbre $\mathfrak{s}_\alpha$ engendrée par H_α, $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

C'est clair si α est une racine simple α_i car alors $\mathfrak{g}^\alpha = \mathbb{C}X_i$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha} = \mathbb{C}Y_i$. On se ramène à ce cas en appliquant un produit des automorphismes θ_j.

10e étape : $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Soit A un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Comme A est invariant par les $\mathrm{ad}H$, $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$A = (A \cap \mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} (A \cap \mathfrak{g}^\alpha)$$

Comme $\mathfrak{s}_\alpha$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, on a $A \cap \mathfrak{s}_\alpha = 0$.

Donc a fortiori $A \cap \mathfrak{g}^\alpha = 0$. Donc $A \subseteq \mathfrak{h}$.

Comme A est invariant par $\mathrm{ad}X_i$ pour tous les i, on a $A \subseteq \ker(\alpha_i)$ pour tout i. Donc A est nul et $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

11e étape : $\mathfrak{h}$ est une ss-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

En effet, $\mathfrak{h}$ est abélienne (donc nilpotente) et égale à son normalisateur car si $X = H + \sum_{\alpha \in R} a_\alpha X_\alpha$ est dans le normalisateur, on a

$$\mathfrak{h} \ni [H', X] = 0 + \sum_{\alpha \in R} a_\alpha \langle \alpha, H' \rangle X_\alpha$$

pour tout $H' \in \mathfrak{h}$ et donc $a_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in R$.

Clairement, on a $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. ✓

Thm (unicité) : Soient $\mathfrak{g}$ semi-simple de ss-alg. de Cartan $\mathfrak{h}$ et de système de racines R. Soient $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base, $H_i = \alpha_i^*$, $0 \neq X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$, $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ t.q. $[X_i, Y_i] = H_i$. Alors $\mathfrak{g}$ est présentée par les générateurs X_i, Y_i, H_i, $1 \leq i \leq n$, les relations de Weyl et les relation de Serre.

Dém. : Soit $\mathfrak{g}'$ l'alg. de Lie définie par des générateurs H_i', X_i', Y_i', les relations de Weyl et les relations de Serre. On sait que les H_i, X_i, Y_i vérifient les relations de Weyl et de Serre. Il existe donc un unique morphisme $\varphi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ qui envoie H_i', X_i', Y_i' sur H_i, X_i, Y_i. Comme H_i, X_i, Y_i engendrent $\mathfrak{g}$, φ est surjectif. Or on a $\dim \mathfrak{g} = n + |R| = \dim \mathfrak{g}'$. Donc φ est un isomorphisme. ✓

II. Représentations des algèbres de Lie semi-simples complexes

On fixe
- $\mathfrak{g}$ une alg. de Lie semi-simple complexe
- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ une ss-algèbre de Cartan
- $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines associé
- $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base de R
- $R^+ = \{$racines pos. p.r. à $S\}$

Pour tout $\alpha \in R^+$, on choisit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha = \alpha^*$.

Si $\alpha \in S$, on écrit X_i, Y_i, H_i au lieu de $X_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i}, H_{\alpha_i}$.

On pose
$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha$$
$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} = \text{ss-alg. de Borel assoc. à } \mathfrak{h} \text{ et } S$$
$$\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

Exemple : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \cap D_n(\mathbb{C})$,

$\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_i$.

$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$

$S = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n\}$

diag. de Dynkin A_{n-1} : 

$\mathfrak{n}$ = matrices strictement triang. sup.

$\mathfrak{b}$ = matrices triang. sup. de trace nulle

$\mathfrak{n}^- =$ matrices strictement triang. inf.

1. Modules de plus haut poids

Poids

Soit V un $\mathfrak{g}$-module ($\dim V \leq \infty$).

Déf. : Pour $\omega \in \mathfrak{h}^*$, on pose

$$V^\omega = \{v \in V \mid H.v = \omega(H)v\}$$

Les vecteurs de V^ω sont dits de poids ω.

La multiplicité de ω dans V est $\dim V^{\alpha+\omega}$

Si $V^\omega \neq 0$, ω est un poids de V.

Prop. : a) Pour $\omega \in \mathfrak{h}^*$ et $\alpha \in R$, on a $\mathfrak{g}^\alpha V^\omega \subseteq V^{\omega+\alpha}$.

b) La somme $\sum_{\omega \in \mathfrak{h}^*} V^\omega$ est directe.

C'est un sous-module de V.

Dém. : a) Si $v \in V^\omega$ et $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, on a

$$\begin{aligned} H.Xv &= [H,X]v + XHv \\ &= \alpha(H)Xv + X\,\omega(H)v \\ &= (\alpha+\omega)(H).Xv \end{aligned}$$

ce qui montre bien que Xv est de poids $\alpha+\omega$.

b) Comme les V^ω sont des espaces propres simultanés, la somme est directe. Par a), elle est stable par $\mathfrak{g}^\alpha$ pour tout $\alpha \in R$. Clairement elle est stable par $\mathfrak{h}$. Donc elle est stable par $\mathfrak{g}$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}$. ✓

Vecteurs primitifs

Soit V un $\mathfrak{g}$-module ($\dim V < \infty$).

Déf. : Un vecteur $v \in V$ est primitif de poids $\omega \in \mathfrak{h}^*$ si

a) $0 \neq v \in V^{\omega}$

b) $X_\alpha v = 0$ pour tout $\alpha \in R^+$.

Rques : 1) On a $X_\alpha v = 0$ pour tout $\alpha \in R^+$ ssi on a $X_i v = 0$ pour tous $1 \leq i \leq n$ car les X_i engendrent $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$.

2) $v \in V$ est primitif de poids ω ssi c'est un vecteur propre simultané pour $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$

Prop. : Soit $v \in V$ un vecteur primitif de poids ω et soit $E \subseteq V$ le sous-module engendré par v.

a) Si $\beta_1, \dots, \beta_k$ sont les racines positives, alors E est engendré (comme espace vectoriel) par les $y_{\beta_1}^{m_1} \cdots y_{\beta_k}^{m_k} . v$, $m_i \in \mathbb{N}, \forall i$.

b) Les poids de E sont de la forme
$$\omega - \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i, \quad p_i \in \mathbb{N}, \forall i.$$

Ils sont de multiplicité finie.

c) ω est un poids de E de multiplicité 1.

d) E est un module indécomposable.

Déf. : Un module est <u>indécomposable</u> s'il est non nul et n'est pas la somme directe de deux sous-modules non nuls.

Rque : Tout module simple est indécomposable. $\mathbb{C}^2$ est un module indécomposable sous l'action de $\mathfrak{b}_2(\mathbb{C})$ mais pas un module simple.

Dém. de la Prop. a) Soient $A = U\mathfrak{g}$, $B = U\mathfrak{b}$, $C = U\mathfrak{n}^-$ les algèbres enveloppantes. Comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{b}$, on a $A = C.B$. Donc $E = A.v = C.B.v$.

Comme v est vecteur propre simultané pour $\mathfrak{b}$, tout $u.v$, $u \in B$, est proportionnel à v. Donc $CBv = Cv$. Or par le thm de PBW, les $y_{\beta_1}^{m_1} \cdots y_{\beta_k}^{m_k}$ forment une base de C. ok.

b) Par la prop. précédente, le vecteur $y_{\beta_1}^{m_1} \cdots y_{\beta_k}^{m_k} v$ est de poids $\omega - \sum_{j=1}^{k} m_j \beta_j$ et chaque β_j est comb. linéaire à coeff. entiers ≥ 0 des racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

c) On a $\omega - \sum_{j=1}^{k} m_j \beta_j = \omega$ si et seulement si tous les m_j s'annulent.

d) Si E est la somme directe de deux sous-modules E_1 et E_2, on a $E^\omega = E_1^\omega \oplus E_2^\omega$. Comme $\dim E^\omega = 1$, on doit avoir $E_1^\omega = E^\omega$ ou $E_2^\omega = E^\omega$. Si $E_1^\omega = E^\omega$, alors $v \in E_1$ et comme v engendre E, cela implique $E = E_1$ et $0 = E_2$. De même si $E_2^\omega = E^\omega$. ✓

Modules simples à plus haut poids

Thm: Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple qui contient un vecteur primitif de poids ω. Alors

a) à des multiples scalaires près, v est l'unique élément primitif de V. Son poids ω est appelé le plus haut poids de V.

b) Les poids π de V sont de la forme
$$\pi = \omega - \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i, \quad m_i \in \mathbb{N}, \forall i.$$
Ils sont de multiplicité finie. La multiplicité de ω est 1. On a $V = \bigoplus_{\pi \text{ poids}} V^\pi$.

c) Deux $\mathfrak{g}$-modules simples V_1 et V_2 à plus hauts poids ω_1 et ω_2 sont isomorphes ssi $\omega_1 = \omega_2$.

14/11/2013

Dém : b) Le sous-module E engendré par v est non nul donc égal à V car V est simple.

a) Soit v' un vecteur primitif de poids ω'. Par b), on a

$$\omega' = \omega - \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i$$

pour des $m_i \in \mathbb{N}$. En échangeant les rôles de v et v', on trouve que l'on a aussi

$$\omega = \omega' - \sum_{i=1}^{n} m_i' \alpha_i$$

pour des $m_i' \in \mathbb{N}$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i = \omega - \omega' = \sum_{i=1}^{n} (-m_i') \alpha_i$$

et $m_i = m_i' = 0$ pour tout i. Par b), les vecteurs v et v' sont proportionnels, d'où a).

c) Il suffit de montrer que si V_1 et V_2 ont le même plus haut poids ω, alors V_1 est isomorphe à V_2. Soient $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$ des vecteurs primitifs. Clairement le vecteur $v = v_1 + v_2$ est primitif de poids ω dans $V = V_1 \oplus V_2$. Soit $E \subseteq V$ le ss-module engendré par v. Le morphisme $E \hookrightarrow V \xrightarrow{pr_2} V_2$ envoie v sur $v_2 \neq 0$ et il est donc surjectif. Le noyau de ce morphisme est $E \cap V_1$. C'est un ss-module de V_1 qui ne contient pas v_1 (en effet, On sait que les seuls éléments de E de poids ω sont les multiples de $v = v_1 + v_2$ et v_1 n'est pas multiple de $v_1 + v_2$). Donc le noyau est nul et la projection pr_2 induit un isomorphisme $E \xrightarrow{\sim} V_2$. De même, la projection pr_1 induit un isomorphisme $E \xrightarrow{\sim} V_1$ et V_1 et V_2 sont donc isomorphes.

① Rque : Il peut y avoir des $\mathfrak{g}$-modules simples V t.q. $V = \bigoplus_{\pi \text{ poids}} V^\pi$ et V n'admet pas de vecteur primitif donc pas de plus haut poids. P. ex. soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et soit V l'espace vectoriel complexe de base e_n, $n \in \mathbb{Z}$. Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. On définit des endomorphismes de V par

$$He_n = 2n e_n, \quad Ee_n = \sqrt{q - n^2 - n}\, e_{n+1}$$
$$Fe_n = \sqrt{q - n^2 + n}\, e_{n-1},$$

où la racine désigne la racine complexe d'argument dans $[0, \pi[$. Alors on vérifie que V devient un $\mathfrak{g}$-module simple qui n'a pas de vecteur primitif car $q \notin \mathbb{Z}$. Néanmoins on verra que toutes les représentations simples de dimension finie admettent un vecteur primitif.

(1)

Rque : Il existe des $\mathfrak{g}$-modules qui n'ont aucun poids. Par exemple $V = U\mathfrak{g}$ où $\mathfrak{g}$ agit par la mult. à gauche

$$X.u = Xu \quad , \quad X \in \mathfrak{g}, u \in U\mathfrak{g}$$

n'a aucun poids. (exo!)

Déf. : Pour $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{h}^*$, on définit
$$\omega_1 \leq \omega_2 \iff \omega_2 = \omega_1 + \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i$$
pour des $m_i \in \mathbb{N}$.

Rque : On a ainsi défini un ordre partiel sur $\mathfrak{h}^*$.

Déf. : Un poids ω d'un $\mathfrak{g}$-module V est un <u>plus haut poids</u> si $\omega \geq \lambda$ pour tout poids λ de V.

Rque : Si ω est un plus haut poids de V, alors les vecteurs non nuls de V^ω sont primitifs.

Thm : Pour tout $\omega \in \mathfrak{h}^*$, il existe un $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poid ω, unique à isomorphisme près.

Dém : 1ère étape : Construction d'un $\mathfrak{g}$-module V_ω contenant un vecteur primitif v de poids ω qui engendre V_ω.

Soit $\mathbb{C}_\omega$ le $\mathfrak{b}$-module $\mathbb{C}$ où $\mathfrak{n}$ agit par 0 et $\mathfrak{h}$ par ω. On considère $\mathbb{C}_\omega$ comme un module sur $U\mathfrak{b} \subseteq U\mathfrak{g}$. On pose
$$V_\omega := U\mathfrak{g} \underset{U\mathfrak{b}}{\otimes} \mathbb{C}_\omega$$

Par le thm de PBW, on a un isomorphisme de $U\mathfrak{b}$-modules à droite

$$U\mathfrak{g} \xleftarrow{\sim} U\mathfrak{n}^- \otimes_{\mathbb{C}} U\mathfrak{b}$$

donné par la multiplication et donc un isomorphisme de $U\mathfrak{n}^-$-modules à gauche

$$V_\omega = U\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\omega \cong U\mathfrak{n}^- \otimes_{\mathbb{C}} U\mathfrak{b} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\omega$$

$$\cong U\mathfrak{n}^- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\omega$$

En particulier, toute base de $U\mathfrak{n}^-$ fournit une base de V_ω. Clairement V_ω est engendré par $v = 1 \otimes 1$ qui est visiblement primitif de poids ω.

Déf. : Le module V_ω s'appelle le <u>module de Verma</u> de plus haut poids ω.

2e étape : Construction d'un quotient simple de V_ω.

Soit $V_\omega^- = \sum_{\pi \neq \omega} (V_\omega)^\pi$. ① Supposons que $V' \subsetneq V_\omega$ est un ss-module propre. Montrons que $V' \subseteq V_\omega^-$. En effet, comme V' est stable par $\mathfrak{h}$, on a $V' = \sum_{\pi \in \mathfrak{h}^*} V'^\pi$. Si on avait $V'^\omega \neq 0$, alors

① Notons que V_ω^- n'est pas un ss-module en général.

V^{ω} contiendrait v et on aurait $V' = V_\omega$.
Donc $V' = \sum_{\pi \neq \omega} V^{\pi}$ est contenu dans V_ω^-.
Soit N_ω le $\mathfrak{B}$-module de V_ω engendré par tous les $\mathfrak{B}$-modules V' distincts de V^ω. On a $N_\omega \subseteq V_\omega^-$ de façon que $V_\omega / N_\omega \neq 0$.
Clairement V_ω / N_ω est simple de plus haut poids ω. $\checkmark$

Exemple : Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ avec $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$.
Soit $\omega \in \mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}$. Alors on a

$$V_\omega = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\omega \cong (U\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\omega = \mathbb{C}[F] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\omega$$

Si on pose $e_n = F^n \otimes 1$, on a

$$F e_n = e_{n+1}, \quad \forall n \geq 0$$
$$H e_n = (\omega - 2n) e_n, \quad \forall n \geq 0$$
$$E e_0 = 0$$
$$E e_n = n(\omega - n + 1) e_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

(voir le Lemme p. 163). Donc si $\omega = m \in \mathbb{N}$, alors e_{m+1} est un vecteur primitif qui engendre un sous-module $N = \bigoplus_{n \geq m+1} \mathbb{C} e_n$ et le quotient V_m / N est de dimension $m+1$.

Clairement V_m/N est alors isomorphe au module simple de dimension $m+1$ et $N = N_\omega$. Si $\omega \notin N$, alors clairement V_m est simple lui-même (et de dimension infinie).

Modules de dimension finie

Prop.: Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dim. finie.

a) $V = \bigoplus_{\pi \in \mathfrak{h}^*} V^\pi$

b) Si π est un poids de V, alors $\pi(H_\alpha)$ est entier pour tout $\alpha \in R$.

c) Si $V \neq 0$, V contient un vecteur primitif.

d) Si V est engendré par un vecteur primitif, V est simple.

Dém.: $\mathfrak{g}$ est semi-simple et $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ est formé d'éléments semi-simples. On sait que la représ. $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ associée à V préserve la décomposition de Jordan. Donc les $\rho(H)$, $H \in \mathfrak{h}$, sont diagonalisables et commutent. D'où a).

c) Considérons la restriction de V à $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ est résoluble car $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{n}$

et clairement $\mathfrak{n}$ est nilpotente.
Par le thm de Lie, le $\mathfrak{b}$-module V admet un ss-module de dim. 1. Tout générateur de ce ss-module est un vecteur primitif.

d) Soit $v \in V$ un vecteur primitif. On sait que le ss-module engendré par v est indécomposable. Donc V est indécomposable et de dim. finie. Si $W \subseteq V$ est un ss-module, alors on a $V = W \oplus W'$ par le thm de Weyl. Donc $W = 0$ ou $W = V$ et V est simple.

e) Soit $\alpha \in R^+$ et soit $\mathfrak{s}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$ la ss-algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ engendrée par X_α, Y_α et H_α. On restreint V à $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Comme V est de dimension finie, on sait que les valeurs propres de H_α agissant dans V sont des entiers. Or ces valeurs propres sont exactement les $\pi(H_\alpha)$ où π parcourt les poids de V. ✓

Corollaire : Tout $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie admet un plus haut poids.

Dém. : Cela résulte de c). ✓

Thm : Soient $\omega \in \mathfrak{h}^*$ et E_ω un $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids ω.
Le module E_ω est de dimension finie si et seulement si on a
$$\omega(H_\alpha) \in \mathbb{N} \text{ pour tout } \alpha \in R^+.$$

Rque : De façon équivalente : $\omega(H_i) \in \mathbb{N}, \forall i$.
car les H_i forment une base du système de racines dual formé par les $H_\alpha = \alpha^*$ dans $\mathfrak{h}$.

Dém : La condition est nécessaire : Si v est un vecteur primitif de E_ω pour $\mathfrak{g}$, il l'est aussi pour la ss-algèbre $s_\alpha \cong sl_2$. On sait que le poids d'un vecteur primitif pour sl_2 est un entier ≥ 0. Montrons que la condition est suffisante. Soit v un vecteur primitif de E_ω et soit $1 \leq i \leq n$. Posons
$$m_i = \omega(H_i) \quad \text{et} \quad v_i = y_i^{m_i+1} v.$$
Si $i \neq j$, alors X_j et Y_i commutent. Alors on a
$$X_j v_i = X_j y_i^{m_i+1} v = y_i^{m_i+1} X_j v = 0.$$
On sait aussi que
$$X_i y_i^t v = t(m_i - t + 1) y_i^{t-1} v$$
pour $t \geq 0$ (voir le lemme page 163).

Donc
$$X_i v_i = X_i y_i^{m_i+1} = 0.$$

Donc si $v_i \neq 0$, alors v_i est un élément primitif de poids $\omega-(m_i+1)\alpha_i$. Or comme E_ω est simple engendré par le vecteur primitif v de poids ω, ses seuls vecteurs primitifs sont de poids ω. Donc on a $v_i = 0$.

Il s'ensuit que le ss-espace vectoriel $F_i \subseteq E_\omega$ engendré par les $y_i^p v$, $0 \leq p \leq m_i$, est un $\mathfrak{s}_i$-sous-module de dim. finie de E_ω, où $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}_{\alpha_i} = \mathbb{C}X_i \oplus \mathbb{C}Y_i \oplus \mathbb{C}H_i$.

Notons T_i l'ensemble des $\mathfrak{s}_i$-ss-modules de E_ω et E_i' leur somme. Supposons que $F \in T_i$. Montrons que $\mathfrak{g}.F \in T_i$. Pour $y \in \mathfrak{g}$, $w \in F$ et $X \in \mathfrak{s}_i$, on a
$$X.yw = [X,y].w + y.\underbrace{Xw}_{\in F} \in \mathfrak{g}.F.$$

Donc $\mathfrak{g}.F$ est bien un $\mathfrak{s}_i$-ss-module et clairement $\mathfrak{g}.F$ est de dimension finie.

Donc E_i' est un $\mathfrak{g}$-ss-module de E_ω. Comme E_ω est simple et $E_i' \neq 0$ (il contient F_i), on a $E_i' = E_\omega$.

Ainsi, on a montré que E_ω est somme de A_i-ss-modules de dimension finie.
Notons P_ω l'ensemble des poids de E_ω.
Montrons que P_ω est stable sous la symétrie s_i associée à α_i. Soit $\pi \in P_\omega$ et y un vecteur non nul de E_ω^π. Par la Proposition, le nombre $p_i = \pi(H_i)$ est un entier. Posons

$x = y_i^{p_i} y$ si $p_i \geq 0$ et $x = X_i^{-p_i} y$ si $p_i < 0$.

On sait que y est dans un A_i-ss-module de dimension finie de E_ω. Par la structure des $sl_2(\mathbb{C})$-modules de dimension finie, on sait que $x \neq 0$. Or le poids de x est

$$\pi - p_i\alpha_i = \pi - \pi(H_i)\alpha_i = \pi - \langle \alpha_i^*, \pi \rangle \alpha_i = s_i(\pi).$$

Donc $s_i(\pi)$ est un poids de E_ω et P_ω est bien invariant sous s_i.
Montrons que P_ω est fini. Si $\pi \in P_\omega$, on sait que $\pi = \omega - \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i$ pour des entiers $p_i \geq 0$. Il reste à majorer ces entiers.

Comme $-S$ est une base de R, il existe un élément $w \in W$ qui envoie S sur $-S$. On sait que w est produit des symétries s_i.

Donc $w(\pi)$ est dans P_ω et on a

$$w(\pi) = \omega - \sum_{i=1}^{n} q_i \alpha_i$$

pour des $q_i \geq 0$. En appliquant w^{-1} à cette égalité on obtient

$$\pi = w^{-1}(\omega) + \sum_{i=1}^{n} q_i \, w(\alpha_i)$$

$$= w^{-1}(\omega) + \sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i$$

pour des $r_i \geq 0$. Donc

$$\pi = \omega - \sum p_i \alpha_i = w^{-1}(\omega) + \sum r_i \alpha_i$$

$$\omega - w^{-1}(\omega) = \sum (p_i + r_i) \alpha_i$$

Donc p_i est borné par le coeff. c_i dans l'écriture $\omega - w^{-1}(\omega) = \sum c_i \alpha_i$

Ainsi les coeff. p_i sont bien majorés. Ainsi E_ω n'admet qu'un nombre fini de poids et comme chaque poids est de multiplicité finie, E_ω est bien de dimension finie. ✓

Rques : 1) On a vu dans la dém. que l'ensemble P_ω des poids de E_ω est invariant sous l'action du groupe de Weyl. En fait, si $\pi \in P_\omega$ et $w \in W$, alors π et $w(\pi)$ ont la même multiplicité. Il suffit de montrer cela pour une symétrie $w = s_i$ par rapport à une racine simple.

On vérifie alors que

$$\theta = e^{X_i} e^{-Y_i} e^{X_i} : E_\omega \longrightarrow E_\omega$$

envoie l'espace E_ω^π sur $E_\omega^{w(\pi)}$ (notons que les X_i et Y_i agissent par des opérateurs nilpotents dans E_ω de façon que θ est bien défini)

2) Soit ω_i, $1 \leq i \leq n$, la base de $\mathfrak{h}^*$ duale de la base H_i, $1 \leq i \leq n$, de $\mathfrak{h}$. On a donc

$$\omega_i(H_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

On appelle les ω_i les <u>poids fondamentaux</u> du système de racines R p.r. à la base S. Ils forment une base (sur $\mathbb{Z}$) du <u>réseau des poids</u>. $P = \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(H_i) \in \mathbb{Z},\ \forall\, 1 \leq i \leq n \}$.

On appelle <u>poids dominants</u> les éléments de

$$P_+ = \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(H_i) \in \mathbb{N}, \forall i \}$$

Un poids est dominant ssi il est combinaison linéaire à coeff. entiers positifs des poids fondamentaux ω_i. On a donc une bijection

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}\text{-modules simples} \\ \text{de dim. finie} \end{array} \right\} / \text{isom.} \xrightarrow{\sim} P_+$$

$V \longmapsto$ plus haut poids de V

$L(\lambda) \longleftarrow\!\shortmid \ \lambda$

Les modules simples de plus haut poids un poids fondamental s'appellent les <u>modules fondamentaux</u> de $\mathfrak{g}$.

Exemple : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{h} = \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$,

$\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_i$

$R = \{ \alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j \}$

$S = \{ \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \dots, \alpha_{n,n+1} \}$

$H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$, $1 \leq i \leq n$.

$\omega_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ envoie $H = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$

sur $\omega_i(H) = \lambda_1 + \dots + \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$.

En particulier, on a $\omega_1(H) = \lambda_1$.

Le module fondamental de plus haut poids ω_1 est la représ. tautologique $\mathbb{C}^{n+1} = E$. Le vecteur $v = e_1$ y est primitif de poids ω_1.

Le module fondamental de plus haut poids ω_i, $1 \leq i \leq n$, est $\Lambda^i E$ avec pour vecteur primitif $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_i$.

(1) Application au groupe de Weyl

Prop. : Le groupe de Weyl agit de façon simplement transitive sur l'ensemble des bases de R.

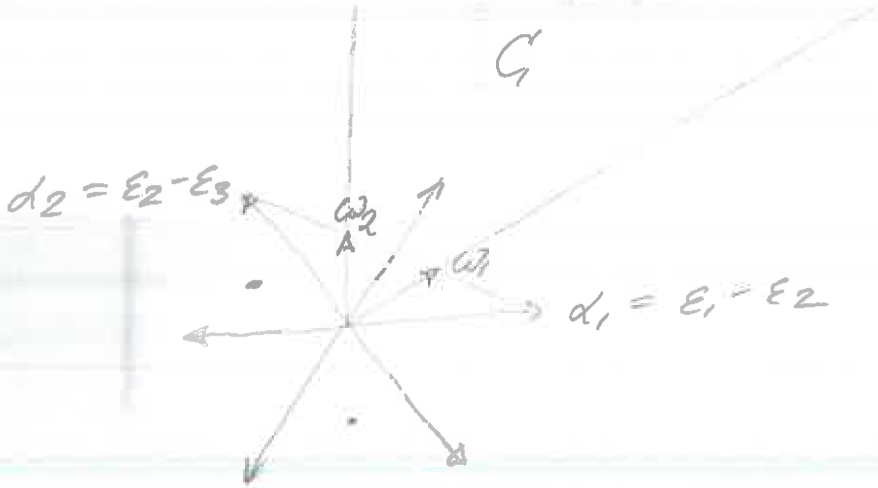
Dém. : On sait déjà que W agit de façon transitive. Il reste à montrer que si $w(S) = S$, alors $w = e$. Soit F l'ens. des poids fondamentaux. On a $w(F) = F$ (car w permute les α_i donc les $H_i = \alpha_i^*$). Si $\omega \in F$, on sait que $w(\omega)$ est un poids du module fondamental V de plus haut poids ω. Donc $\omega - w(\omega)$ est combinaison à coefficients entiers ≥ 0 des racines simples α_i. Ceci vaut pour tout $\omega \in F$. Mais on a aussi

$$\sum_{w \in F} (w - w(w)) = \sum_{w \in F} w - \sum_{w \in F} w = 0.$$

Cela n'est possible que si chacun des termes $w - w(w)$ s'annule. Comme les $w \in F$ forment une base de $\mathfrak{h}^*$, il s'ensuit que $w = e$. ✓

① Cas particulier : $\mathfrak{g} = sl_3(\mathbb{C})$

Système de racines de type A_2 : ②



$L(\omega_1) = E = \mathbb{C}^3$

vecteur primitif : e_1

espaces de poids : $\mathbb{C}e_1$, $\mathbb{C}e_2$, $\mathbb{C}e_3$

Poids associés : $\varepsilon_1 = \omega_1$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \omega_1 - \alpha_1$

$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \omega_1 - \alpha_1 - \alpha_2$

On trouve que l'ens. des poids est inv. par W.

$L(\omega_2) = \Lambda^2 E = \Lambda^2 \mathbb{C}^3$

vecteur primitif : $e_1 \wedge e_2$

espaces de poids : $\mathbb{C}(e_1 \wedge e_2)$, $\mathbb{C}(e_2 \wedge e_3)$, $\mathbb{C}(e_1 \wedge e_3)$

Poids associés : $\varepsilon_1+\varepsilon_2 = \omega_2$

$\varepsilon_2+\varepsilon_3 = \omega_2-\alpha_1-\alpha_2$

$\varepsilon_1+\varepsilon_3 = \omega_2-\alpha_2$

② Notons que

$$\omega_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_1 - \frac{1}{3}\overbrace{(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}^{=0 \text{ car } \operatorname{Tr} X = 0\ \forall X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})}$$

$$= \frac{2}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_3$$

$$= \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$$

$$\omega_2 = \varepsilon_1+\varepsilon_2 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2$$

Prochain but : Pour $\lambda \in P_+$, calculer $\dim L(\lambda)$ et $\dim L(\lambda)^\mu$ pour $\mu \in \mathfrak{h}^*$.

Outil : centre de $U(\mathfrak{g})$.

Modules de Verma : propriété universelle

Foncteurs induction et restriction

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres associatives unifères.

Déf : Pour un B-module M, la restriction $\operatorname{res} M$ est le A-module avec espace ss-jacent M et action

$$a.m = \varphi(a)m, \quad \forall a \in A, \forall m \in M.$$

Pour un A-module L, l'induction $\operatorname{ind} L$ est le B-module $B \otimes_A L$.

Rque : Clairement res M est fonctoriel en M, i.e. un morphisme de B-modules $f : M \to M'$ induit un morphisme de A-modules

$$\mathrm{res}\, f : \mathrm{res}\, M \to \mathrm{res}\, M', \; m \longmapsto f(m).$$

De même pour ind :

$$\mathrm{ind}\, f : \mathrm{ind}\, L \to \mathrm{ind}\, L', \; b \otimes l \longmapsto b \otimes f(l).$$

Lemme : Pour $L \in A\text{-Mod}$ et $M \in B\text{-Mod}$, on a un hom. canonique

$$\Phi : \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{res}\, M) \simeq \mathrm{Hom}_B(\mathrm{ind}\, L, M).$$

Rque : On a donc une paire de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{ccc} & A\text{-Mod} & \\ B \underset{A}{\otimes} ? = \mathrm{ind} & \downarrow \quad \uparrow & \mathrm{res} \\ & B\text{-Mod} & \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ \downarrow \varphi \\ B \end{array}$$

associée à $\varphi : A \longrightarrow B$

Dém. : Φ envoie

$$f : L \longrightarrow \mathrm{res}\, M \text{ sur } \Phi f : \begin{array}{l} B \underset{A}{\otimes} L \longrightarrow M \\ b \otimes l \longmapsto b \cdot f(l). \end{array}$$

$\Psi : \mathrm{Hom}_B(\mathrm{ind}\, L, M) \to \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{res}\, M)$ envoie

$$g : B \underset{A}{\otimes} L \to M \text{ sur } \Psi g : \begin{array}{l} L \longrightarrow M \\ l \longmapsto f(1 \otimes l). \end{array}$$

On vérifie que Φ et Ψ sont bien définis et réciproques. ✓

Cas particulier : $\mathfrak{g}$ semi-simple, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ss-alg. de Cartan, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $S \subset R$ base, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ ss-alg. de Borel associée. On considère $\varphi : U\mathfrak{b} \hookrightarrow U\mathfrak{g}$. On trouve que pour $L \in \mathfrak{b}$-Mod et $M \in \mathfrak{g}$-Mod, on a

$$\mathrm{Hom}_{U\mathfrak{g}}(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} L, M) \simeq \mathrm{Hom}_{U\mathfrak{b}}(L, \mathrm{res}\, M).$$

Soit $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ une forme linéaire et $\mathbb{C}_\lambda$ le $\mathfrak{b}$-module simple où $\mathfrak{h}$ agit par λ et $\mathfrak{n}$ par 0. Alors on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{U\mathfrak{b}}(\mathbb{C}_\lambda, M) \simeq \{v \in M \mid v \in M^\lambda, \mathfrak{n}.v = 0\}.$$

Déf. : $\Delta(\lambda)$ = module de Verma de plus haut poids λ.

$$= U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda.$$

Cor. : Soit $M \in \mathfrak{g}$-Mod. Pour tout $v \in M^\lambda$ annulé par $\mathfrak{n}$, il existe un unique morphisme de $\mathfrak{g}$-modules

$$f : \Delta(\lambda) \longrightarrow M \quad \text{t.q. } f(1 \otimes 1) = v.$$

Dém. : $\mathrm{Hom}_{U\mathfrak{g}}(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda, M) \simeq \mathrm{Hom}_{U\mathfrak{b}}(\mathbb{C}_\lambda, \mathrm{res}\, M)$

$\simeq \{v \in M^\lambda \mid \mathfrak{n}.v = 0\}$. ✓

Intégrité et noethérianité de l'algèbre env.

Prop. : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

a) $U\mathfrak{g}$ est intègre, i.e. si u et v sont des éléments non nuls de $\mathfrak{g}$, alors uv est non nul.

b) Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, alors $U\mathfrak{g}$ est noethérienne à droite (et à gauche), i.e. toute suite croissante d'idéaux à droite

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

devient stationnaire (i.e. $I_n = I_{n+1}$ pour tous $n \gg 0$).

Dém. : a) Rappelons que $U\mathfrak{g}$ est filtrée par les

$$U_p\mathfrak{g} = \text{image de } \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{\otimes p} \text{ dans } U\mathfrak{g}.$$

et que

$$\operatorname{gr} U\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \geq 0} U_p\mathfrak{g} / U_{p-1}\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g}).$$

Soit p t.q. $u \in U_p\mathfrak{g} \setminus U_{p-1}\mathfrak{g}$ et q t.q. $v \in U_q\mathfrak{g} \setminus U_{q-1}\mathfrak{g}$. Alors les classes $\bar{u}, \bar{v}$ sont non nulles dans $\operatorname{gr} U\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g})$. Comme $S(\mathfrak{g})$ est intègre, on a $\bar{u}\bar{v} \neq 0$. Donc $\overline{uv} \neq 0$ et $uv \neq 0$.

b) On utilise que $S(\mathfrak{g})$ est noethérienne. Exercice ! ✓

Certains ss-module des modules de Verma

Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\mathfrak{h}$, R, S, $\mathfrak{b}$ comme d'habitude.

Déf. : "L'action point" de W sur $\mathfrak{h}^*$ est définie par

$$w \cdot \lambda = w(\lambda+\rho) - \rho .$$

où $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$.

Rque : C'est une action de W sur $\mathfrak{h}^*$ par des transformations <u>affines</u> de point fixe $-\rho$.

Prop. : Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $1 \leq i \leq n$ et $m = \lambda(H_i)$. On suppose que $m \in \mathbb{N}$. Alors on a un morphisme injectif

$$\Delta(s_i \cdot \lambda) \hookrightarrow \Delta(\lambda)$$

qui envoie $1 \otimes 1$ sur $y_i^{m+1} \cdot (1 \otimes 1)$.

Rque : Si $\lambda \in P_+$ (i.e. $\lambda(H_i) \in \mathbb{N}$, $\forall i$), alors on peut montrer que

$$\Delta(\lambda) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta(s_i \cdot \lambda)$$

est le quotient simple $L(\lambda)$ de $\Delta(\lambda)$ (voir Dixmier, Lemme 7.2.5)

Dém. : Comme $\Delta(\lambda) \simeq U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda$ comme $U(\mathfrak{n}^-)$-module, l'élément $v' = y_i^{m+1} \cdot (1 \otimes 1)$ est non nul. Il est de poids

$$\begin{aligned} \lambda - (m+1)\alpha_i &= \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i - \alpha_i \\ &= s_i(\lambda) - \alpha_i \\ &= s_i(\lambda+\rho) - \rho = s_i \cdot \lambda \end{aligned}$$

car $s_i(\rho) = s_i\left(\frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \alpha\right) = \rho - \alpha_i$.

Comme dans la dém. du Thm d'existence des $\mathfrak{g}$-modules de dim. finie (p. 184), on voit que v' est annulé par $\mathfrak{n}$. Il existe donc un unique morphisme de $\mathfrak{g}$-modules

$$f : \Delta(s_i \cdot \lambda) \longrightarrow \Delta(\lambda)$$

qui envoie $1 \otimes 1$ sur v'. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta(s_i \cdot \lambda) & \xrightarrow{f} & \Delta(\lambda) \\ \wr\| & & \wr\| \\ U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{s_i \cdot \lambda} & \longrightarrow & U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda \\ u \otimes 1 & \longmapsto & u \cdot y_i^{m+1} \otimes 1. \end{array}$$

Comme la multi. à droite par y_i^{m+1} de $U\mathfrak{n}^-$ dans $U\mathfrak{n}^-$ est injective ($U\mathfrak{n}^-$ est intègre), le morphisme f est injectif. ✓

Invariants dans l'algèbre symétrique

Lemme : Soient k un corps de caract. nulle et $X_1, \dots, X_n$ des indéterminées. Alors l'espace des polynômes homogènes de degré $m \in \mathbb{N}$ en $X_1, \dots, X_n$ est engendré par les

$$(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)^m$$

où $a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$.

Dém. : Pour $n=0$ et $n=1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $n=2$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, considérons $\ell_a = X_1 + aX_2$ et

$$\ell_a^m = (X_1 + aX_2)^m$$

$$= X_1^m + a\binom{m}{1}X_1^{m-1}X_2 + \dots + a^m X_2^m$$

Pour $a \in \{0, 1, \dots, m\}$, les ℓ_a^m sont linéairement indépendants car la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m & m^2 & m^m \end{bmatrix}$$

est inversible (Van der Monde) et les $\binom{m}{k}X_1^{m-k}X_2^k$ sont lin. indép. Comme l'espace des polynômes homog. de degré m en X_1, X_2 est de dim. $m+1$, les l_a^m, $0 \leq a \leq m$, engendrent cet espace.

Supposons $n \geq 3$. Pour $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, posons $l_a = a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$. Par le cas $n = 2$, les $(X_1 + b l_a)^m$, $b \in \mathbb{Z}$, engendrent l'espace des polynômes homogènes de degré m en X_1 et l_a.

Donc chaque $X_1^k l_a^{m-k}$ est comb. lin. des $(X_1 + b l_a)^m$, $b \in \mathbb{Z}$. Par l'hyp. de récurrence, chaque monôme $X_2^{e_2} \dots X_n^{e_k}$ de degré $m - k = \sum e_j$ est comb. lin. des l_a^{m-k}, $a \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Donc chaque $X_1^k X_2^{e_2} \dots X_n^{e_k}$ est comb. lin. des $X_1^k l_a^{m-k}$, $a \in \mathbb{Z}^{n-1}$, et donc des $(X_1 + b l_a)^m$, $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}^{n-1}$. ✓

Exemple : Si $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}H_n$ et $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ est le réseau des poids, alors $P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\omega_i$ et $S(\mathfrak{h}^*) \simeq \mathbb{C}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ est engendré par les λ^m, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in P$.

Soit k un corps de caractéristique nulle.
Soit G un groupe fini et V un G-module.
On pose

$$V^G = \{ v \in V \mid gv = v \} = \{\text{invariants}\}$$

$$V_G = V / \langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle = \{\text{coinvariants}\}$$

Lemme : La projection $V^G \to V_G$ est un isomorphisme.

Dém. : On a un inverse qui envoie la classe de v sur $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv$. ✓

Supposons V de dimension finie. Soit V^* le dual de V.

Déf. : Une <u>forme n-multilinéaire symétrique</u> est une application linéaire

$$g : V\otimes\ldots\otimes V \longrightarrow k$$

t.q. $g(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(n)}) = g(v_1,\ldots,v_n)$

pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$.

Rque : L'espace des formes n-multilinéaires sym. s'identifie avec $(V^{*\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$, où $\mathfrak{S}_n$ agit en permutant les facteurs.

L'espace $(V^{*\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$ s'identifie avec l'espace $S^n(V^*)$ des polynômes homogènes de degré n.

La projection $(V^{*\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow (V^{*\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$

s'identifie avec l'application

$$g(v_1, \dots, v_n) \longmapsto g(v, v, \dots, v) = f(v)$$

Donc pour tout polynôme homogène f de degré n, il existe une unique forme sym. multilinéaire $g(v_1, \dots, v_n)$ t.q.

$$f(v) = g(v, v, \dots, v).$$

Si V est un $\mathfrak{a}$-module pour une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, alors V^* devient un $\mathfrak{a}$-module par

$$Xv^*(v) = -v^*(Xv) \quad , X \in \mathfrak{a}, v^* \in V^*, v \in V$$

et $V^{*\otimes n}$ devient un $\mathfrak{a}$-module. Alors $\mathfrak{S}_n$ agit par des autom. de $\mathfrak{a}$-modules et la projection

$$(V^{*\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow (V^{*\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$$

devient un isom. de $\mathfrak{a}$-modules.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dim. finie. Rappelons que $Int(\mathfrak{g})$ est le ss-groupe de $Aut(\mathfrak{g})$ engendré par les e^{adX}, $X \in \mathfrak{g}$. On considère $\mathfrak{g}^*$ comme $\mathfrak{g}$-module (dual de la repres. adjointe) et on munit $S(\mathfrak{g}^*) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(\mathfrak{g}^*)$

de la structure de $\mathfrak{g}$-module naturelle.

Rappel : Pour un $\mathfrak{g}$-module M, on note
$$M^{\mathfrak{g}} = \{m \in M \mid Xm = 0, \forall m \in M\}.$$
le ss-espace des $\mathfrak{g}$-invariants.

Lemme : Soit $f \in S(\mathfrak{g}^*)$.

i) $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$

$\Updownarrow$

ii) $f \circ \theta = f$ pour tout $\theta \in Int(\mathfrak{g})$.

Dém : On peut supposer f homogène de degré n. Soit $g(X_1, \dots, X_n)$ la forme n-multilin. sym. t.q. $g(X, \dots, X) = f(X)$.

i) $\Rightarrow$ ii) Pour $X \in \mathfrak{g}$, on a
$$-Xg(X_1, \dots, X_n) = g([X, X_1], X_2, \dots, X_n) + g(X_1, [X, X_2], \dots, X_n) + \dots + g(X_1, \dots, X_{n-1}, [X, X_n]) = 0$$

Par un petit calcul, cela donne
$$g(e^{adX} X_1, \dots, e^{adX} X_n) = g(X_1, \dots, X_n).$$

Donc g est bien invariant par $Int(\mathfrak{g})$.

ii) $\Rightarrow$ i) Soit $X \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{C}$. On a

$$g(e^{t\,\mathrm{ad}X}X_1, \dots, e^{t\,\mathrm{ad}X}X_n) = g(X_1, \dots, X_n).$$

En prenant la dérivée par rapport à t en $t=0$, on trouve

$$0 = g((\mathrm{ad}X)(X_1), X_2, \dots, X_n) + \dots + g(X_1, \dots, X_{n-1}, \mathrm{ad}X(X_n)).$$

✓

Terminologie : On appelle fonctions polynomiales invariantes sur $\mathfrak{g}$ les éléments de $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.

Lemme : Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Soit $m \in \mathbb{N}$. La fonction $X \mapsto tr(\rho(X)^m)$ est polynomiale invariante.

Dém. : Notons que $End(V)$ devient un $\mathfrak{g}$-module par

$$(X.f)(v) = Xf(v) - f(Xv)$$

et que

$$tr : End(V) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules, où $\mathbb{C}$ est la représentation triviale car

$$tr(\rho(X) \circ f - f \circ \rho(X)) = 0$$

$\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall f \in End(V)$. Alors on a un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g"] & End(V) \arrow[r, "tr"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$X_1 \otimes \dots \otimes X_m \longmapsto \rho(X_1) \dots \rho(X_m)$$

Comme $\mathbb{C}$ est muni de l'action triviale, on a $g([X, X_1], \dots, X_m) + \dots + g(X_1, \dots, [X, X_m]) = 0$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$. Clairement

$$tr(\rho(X)^m) = g(X, \dots, X).$$ ✓

Supposons que $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ une ss-alg. de Cartan, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $S \subset R$ une base, W le groupe de Weyl. L'inclusion $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ induit des morphismes de restriction $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ et $S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{h}^*)$, $f \longmapsto f|_{\mathfrak{h}}$.

Lemme : a) Si $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, alors sa restriction $f|_{\mathfrak{h}}$ est dans $S(\mathfrak{h}^*)^W$.

b) Tout élément de $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$ est combinaison linéaire de fonctions $H \mapsto tr(\rho(H)^m)$ où ρ est une représ. de dim. finie de $\mathfrak{g}$.

Dém. : a) Soit $\alpha \in R$. On va construire $\theta \in Int(\mathfrak{g})$ t.q. $\theta|_{\mathfrak{h}} = s_\alpha$. Il s'ensuivra que

$$f|_{\mathfrak{h}} \circ s_\alpha = f \circ \theta|_{\mathfrak{h}} = f|_{\mathfrak{h}}$$

et comme les s_α engendrent W, on a $f|_{\mathfrak{h}} \in S(\mathfrak{h}^*)^W$.

Soient $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ t.q. $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$.

On pose $\theta = e^{\mathrm{ad} X_\alpha} e^{-\mathrm{ad} Y_\alpha} e^{\mathrm{ad} X_\alpha}$

Montrons que pour $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$\theta(H) = s_\alpha(H) = H - \alpha(H) \cdot H_\alpha.$$

C'est clair si $\alpha(H) = 0$. Il suffit donc de considérer le cas où $H = H_\alpha$. On a un morph. d'algèbres de Lie injectif

$$sl_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g} \qquad \begin{aligned} H &\longmapsto H_\alpha \\ E &\longmapsto X_\alpha \\ F &\longmapsto Y_\alpha \end{aligned}$$

qui induit un morph. de groupes

$$Int(sl_2(\mathbb{C})) \longrightarrow Int(\mathfrak{g})$$

et on a $\varphi(g.X) = \Phi(g)\varphi(X)$ pour tous $X \in sl_2(\mathbb{C})$, et $g \in Int(sl_2(\mathbb{C}))$. Il suffit donc de montrer l'aff. pour $sl_2(\mathbb{C})$. On a $e^{\mathrm{ad} X} = Ad(e^X)$ pour tout $X \in sl_2(\mathbb{C})$, où $Ad(e^X)$ est la conjugaison par e^X. On a

$$e^E e^{-F} e^E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = g$$ et

TO !

$$gHg^{-1} = -H.$$ ✓

b) Les fonctions λ^m, $\lambda \in P$, engendrent l'espace $S^m(\mathfrak{h}^*)$. Pour $f \in S(\mathfrak{h}^*)$, posons

$$\sigma f = \sum_{w \in W} f \circ w .$$

Alors les $\sigma(\lambda^m)$, $\lambda \in P$, engendrent $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$. Comme chaque orbite $W.\lambda$ a un point dans P_+, les $\sigma(\lambda^m)$, $\lambda \in P_+$, engendrent $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$.

Soit $\lambda \in P_+$ et soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ la représentation donnée par le $\mathfrak{g}$-module simple $L(\lambda)$ de plus haut poids λ. Pour $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$\operatorname{tr}(\rho(H)^m) = \sum_{\substack{\pi \text{ poids} \\ \text{de } V}} (\dim V^\pi)\, \pi(H)^m$$

$$= \lambda(H)^m + \sum_{\substack{\pi \text{ poids} \\ \pi < \lambda}} (\dim V^\pi)\, \pi(H)^m .$$

Donc $H \mapsto \operatorname{tr}(\rho(H)^m)$ est combinaison linéaire de $\sigma(\lambda^m)$ et des $\sigma(\pi^m)$ pour $\pi < \lambda$, π poids de V dans P_+. L'ensemble des $\pi < \lambda$, $\pi \in P_+$, est fini et si π est minimal dans cet ensemble, alors la fonction $H \mapsto \operatorname{tr}(\rho(H)^m)$ associée à la rep. simple de plus haut poids π est égale à $\sigma(\pi^m)$. D'où l'affirmation. ✓

Thm de restriction de Chevalley : Le morphisme de restriction $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{res} S(\mathfrak{h}^*)^W$ est un isomorphisme d'algèbres

Dém. : Par le point a) du Lemme précédent, la restriction envoie $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ vers $S(\mathfrak{h}^*)^W$. On sait que les fonctions trace $X \mapsto tr(\rho(X)^m)$, $X \in \mathfrak{g}$, ρ repr. de dim finie, $m \in \mathbb{N}$, sont dans $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ et par le point b) du Lemme précédent, leurs restrictions engendrent $S(\mathfrak{h}^*)^W$ comme espace vectoriel. Donc la restriction est surjective. Supposons que $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ se restreint à 0 sur $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{g}_r \subseteq \mathfrak{g}$ l'ensemble des éléments réguliers. On sait qu'il est dense dans $\mathfrak{g}$. Donc il suffit de montrer que $f|_{\mathfrak{g}_r} = 0$.
Soit $X \in \mathfrak{g}_r$. Alors $C_{\mathfrak{g}}(X)$ est une ss-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et il existe $g \in Int(\mathfrak{g})$ t.q. $g \cdot C_{\mathfrak{g}}(X) = \mathfrak{h}$. En particulier, on a $g \cdot X \in \mathfrak{h}$. Donc

$$f(X) = f(g\cdot X) = 0. \checkmark$$

Rque : La démonstration montre que les fonctions $X \mapsto tr(\rho(X)^m)$, ρ rep. de dim. finie, $m \in \mathbb{N}$, engendrent $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.

Passage au dual

Not. : On note $(\,,)$ la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$.

Rques : 1) Donc $(\,,)$ est une forme bilinéaire sym. non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ et elle induit une forme bilinéaire symétrique non dég. sur $\mathfrak{h}$ qui est W-invariante. En outre la restriction de $(\,,)$ à $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}H_i$ est définie positive car pour $\alpha, \beta \in R$,

$$(H_\alpha, H_\beta) = Tr(\operatorname{ad}H_\alpha \operatorname{ad}H_\beta) = \sum_{\gamma \in R} \underbrace{\gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$(H_\alpha, H_\alpha) = \sum_{\gamma \in R} \gamma(H_\alpha)^2 > 0$$

Donc $(\,,)$ définit un produit scalaire W-invariant sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$

2) La forme $(\,,)$ donne un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$, $X \mapsto (X, ?)$ pour la représentation (co-)adjointe. Celui-ci induit un isom. de W-modules

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^* \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$$

On munit $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ du produit scalaire obtenu par transport de structure.

3) L'isom. $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ induit un isom. de $\mathfrak{g}$-modules $S(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{g})$ noté α et l'isom. $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$ un isomorphisme de W-modules $S(\mathfrak{h}^*) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})$.

Soit res : $S(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S(\mathfrak{h}^*)$ le morphisme de restriction le long de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. On va décrire la flèche qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S(\mathfrak{g}^*) \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] \arrow[d, "\text{res}"', "?"] & S(\mathfrak{g}) \arrow[d, dashed, "\text{cores}"] \\
S(\mathfrak{h}^*) \arrow[r, "\sim", "\beta"'] & S(\mathfrak{h})
\end{tikzcd}$$

Lemme : Soit $J \subset S(\mathfrak{g})$ l'idéal engendré par $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$. Soit $j : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h})$

a) On a $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \oplus J$.

l'homomorphisme défini ainsi.

b) cores $= j$ rend commutatif le diagramme.

Dém. : a) est clair. Comme $\beta \circ \text{res}$ et $\text{cores} \circ \alpha$ sont des morphismes d'algèbres il suffit de vérifier que $\beta \circ \text{res}(g) = \text{cores} \circ \alpha(g)$ pour $g \in \mathfrak{g}^*$. Alors cela résulte de la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}^* \arrow[d] & \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^- \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
\mathfrak{h}^* & \mathfrak{h} \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

qui provient du fait que la décompos.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-)$$

est orthogonale pour $(\,,\,)$. ✓

Corollaire : On a un carré commutatif d'isomorphismes d'algèbres

$$\begin{tikzcd} S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\sim"', "\alpha"] \arrow[d, "\wr", "res"'] & S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \arrow[d, "\wr"', "cors"] \\ S(\mathfrak{h}^*)^W \arrow[r, "\sim", "\beta"'] & S(\mathfrak{h})^W \end{tikzcd}$$

L'isomorphisme de Harish-Chandra

Not. : On note $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$ (à ne pas confondre avec le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$).

Déf. : Un $\mathfrak{g}$-module M admet un caractère central s'il existe un morphisme d'algèbres $\chi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ t.q.

$$z.m = \chi(z).m \;, \quad \forall m \in M.$$

Rques : 1) Pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, la multiplication à gauche par z est un endomorphisme de M. Si M est simple de dimension finie, on a $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(M) \simeq \mathbb{C}$ par le lemme de Schur et donc tout $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie admet un caractère central.

2) Supposons M engendré par un vecteur primitif v de poids λ. On sait que $\dim M^\lambda = 1$.
Soit $z \in Z(\mathfrak{g})$. Comme $m \longmapsto zm$ est un endomorphisme, le vecteur zv est encore de poids λ. Donc $zv = cv$ pour un $c \in \mathbb{C}$.
Comme v engendre M, on a $zm = cm$ pour tout $m \in M$. Donc M admet un caractère central $\chi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ et il est déterminé par $zv = \chi(z)v$ pour $z \in Z(\mathfrak{g})$.

3) En particulier, tout module de Verma $\Delta(\lambda) = U\mathfrak{g} \underset{U\mathfrak{b}}{\otimes} \mathbb{C}_\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, admet un caractère central.

Déf. : Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on définit $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ comme le caractère central de $\Delta(\lambda)$.

Not. : Soit $\beta_1, \dots, \beta_k$ la liste des racines positives.
Pour $q, p \in \mathbb{N}^k$ et $m \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$u(q,m,p) := y_{\beta_1}^{q_1} \cdots y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \cdots H_n^{m_n} X_{\beta_1}^{p_1} \cdots X_{\beta_k}^{p_k}.$$

Rques : 1) On fait agir $X \in \mathfrak{g}$ sur $U(\mathfrak{g})$ par la représentation adjointe. On a alors

$$X.u = [X,u], \ \forall u \in U\mathfrak{g}$$

car les deux côtés sont dérivations en u et on a l'égalité pour $u \in \mathfrak{g}$. En particulier, on a $\quad Z(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

2) En particulier, on a l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ sur $U(\mathfrak{g})$. Elle fournit une décomposition en espaces de poids

$$U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in Q} U(\mathfrak{g})^{\lambda}$$

où $Q = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ est le réseau des racines.

Comme l'action se fait par dérivations, c'est une graduation de l'algèbre $U\mathfrak{g}$.

En particulier, $U(\mathfrak{g})^0$ est une sous-algèbre.

3) L'élément $u(q,m,p)$ est de poids $(p_1-q_1)\beta_1 + \ldots + (p_k-q_k)\beta_k = \lambda$.

Les $u(q,m,p)$ avec un poids λ donné forment une base de $(U\mathfrak{g})^{\lambda}$.

Lemme : Soit $L = (U\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{n} \cap (U\mathfrak{g})^0$.

a) On a $L = \mathfrak{n}^-(U\mathfrak{g}) \cap (U\mathfrak{g})^0$ et L est un idéal bilatère de $(U\mathfrak{g})^0$.

b) On a $U(\mathfrak{g})^0 = U(\mathfrak{h}) \oplus L$.

Dém. : a) L'espace $U\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{n}$ resp. $\mathfrak{n}^-\cdot U\mathfrak{g}$ est l'ens. des combinaisons linéaires des éléments $u(q,m,p)$ tels que $\sum p_i > 0$ resp. $\sum q_i > 0$. On a

$$u(q,m,p) \in (U\mathfrak{g})^\circ \iff p_1\beta_1 + \dots + p_k\beta_k = q_1\beta_1 + \dots + q_k\beta_k$$

Cela implique que

$$U\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{n} \cap (U\mathfrak{g})^\circ = \mathfrak{n}^-(U\mathfrak{g}) \cap (U\mathfrak{g})^\circ .$$

Clairement, cet espace est à la fois un idéal à droite et un idéal à gauche dans $(U\mathfrak{g})^\circ$.

b) Un élément $u(q,m,p)$ appartenant à $(U\mathfrak{g})^\circ$ est dans $U(\mathfrak{h})$ resp. dans L ssi $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 0 = q_1 = \dots = q_k$ resp. $p_1 + \dots + p_k + q_1 + \dots + q_k > 0$.

Cette dichotomie donne la somme directe. ✓

Rque : La projection $U(\mathfrak{g})^\circ \longrightarrow U(\mathfrak{h})$ de noyau L est donc un morphisme d'algèbres.

Déf. : On l'appelle <u>l'homomorphisme de Harish-Chandra</u> associé à $S \subset R$.

Prop. : Soit V un $\mathfrak{g}$-module engendré par un vecteur primitif v de poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Soit χ le caractère central de V. On a

$$\chi(z) = \varphi(z)(\lambda) \quad , \forall z \in Z(\mathfrak{g}),$$

où $\varphi : U(\mathfrak{g})^\circ \longrightarrow U(\mathfrak{h})$ est l'homom. de H.-C. .

Rque : On identifie $U\mathfrak{h} = S\mathfrak{h}$ avec l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}^*$ ce qui donne un sens à l'écriture $\varphi(z)(\lambda)$. Notons que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^0$ de façon que $\varphi(z)$ est bien défini.

(1)

Lemme : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathrm{sym}_n : S^n\mathfrak{g} \longrightarrow U\mathfrak{g}$$
$$X_1 \cdots X_n \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)} .$$

a) Alors sym_n est un isomorphisme sur un supplémentaire de $U_{n-1}\mathfrak{g} \subseteq U_n\mathfrak{g}$.

b) La somme $\mathrm{sym} : S\mathfrak{g} \longrightarrow U\mathfrak{g}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules. En particulier, elle induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$(S\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} Z(\mathfrak{g}).$$

Dém. : a) Clairement, l'image de sym_n est dans $U_n\mathfrak{g}$ et la composition

$$S^n\mathfrak{g} \longrightarrow U_n\mathfrak{g} \longrightarrow U_n\mathfrak{g}/U_{n-1}\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_n(U\mathfrak{g})$$

est l'isomorphisme canonique qui résulte du thm de PBW. Cela donne l'affirmation.

b) Par récurrence, on voit que sym induit un

(1)

Dém. : Soit $z \in Z(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^0 = U(\mathfrak{h}) \oplus L$.

Ecrivons $z = \varphi(z) + l$, $l \in L = U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} \cap U(\mathfrak{g})^0$.

On a

$$z \cdot v = (\varphi(z) + l)v \underset{\substack{\uparrow \\ v \text{ primitif}}}{=} \varphi(z) \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi(z) \in U(\mathfrak{h}) \\ v \text{ de poids } \lambda}}{=} \varphi(z)(\lambda)\, v.$$

✓

isomorphisme $\bigoplus_{k \leq n} S^k\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} U_n\mathfrak{g}$. Clairement, sym_n est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules pour tout n. D'où l'affirmation. ✓

Not. : On note $\tau_{-\rho} : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ la translation de vecteur $-\rho$,

$\gamma : S(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})$, $p \longmapsto p \circ \tau_{-\rho}$

$\varphi : U(\mathfrak{g})_0 \longrightarrow S(\mathfrak{h})$ l'homomorphisme de Harish-Chandra.

Théorème : La composition $\gamma \circ \varphi$ induit un isomorphisme d'algèbres

$$Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$$

qui est indépendant du choix de la base $\mathcal{B} \subset R$. On l'appelle <u>l'isomorphisme de Harish-Chandra</u>.

Dém. : Notons $S(\mathfrak{h})^{W\cdot}$ l'algèbre des invariants dans $S(\mathfrak{h})$ sous l'action "point" de W sur $\mathfrak{h}^*$.

On va montrer qu'on a un carré

$$\begin{array}{ccccc} Z(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi} & S(\mathfrak{h})^{W\cdot} & \xrightarrow[\gamma]{\sim} & S(\mathfrak{h})^W \\ \| & & \neq & & \uparrow{\scriptstyle 2}\ \text{cours} \quad \text{Chevalley} \\ U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} & & \xrightarrow[sym^{-1}]{\sim} & & S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \end{array}$$

qui <u>ne commute pas</u> mais qui induit un carré commutatif dans les espaces gradués associés. Comme $\gamma\circ\varphi$ est clairement un morphisme d'algèbres, cela donnera la première affirmation.

1ère étape : $\varphi : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h})$ prend ses valeurs dans $S(\mathfrak{h})^{W\cdot}$ et $\gamma\circ\varphi$ dans $S(\mathfrak{h})^{W}$.

Soit $\lambda \in P_+$. Soit $1\leq i\leq n$. On sait que $\Delta(s_i\cdot\lambda)$ est un ss-module de $\Delta(\lambda)$. Donc $\Delta(s_i\cdot\lambda)$ et $\Delta(\lambda)$ ont même caractère central : $\chi_\lambda = \chi_{s_i\cdot\lambda}$.

On sait que

$$\chi_\lambda(z) = \varphi(z)(\lambda)$$

$$\chi_{s_i\cdot\lambda}(z) = \varphi(z)(s_i\cdot\lambda).$$

Donc les fonctions polynomiales $\varphi(z)$ et $\varphi(z)\circ(s_i\cdot)$ prennent les mêmes valeurs en tout $\lambda\in P_+$. Elles doivent coïncider. L'application

$$\gamma : S(\mathfrak{h}) \longrightarrow S(\mathfrak{h}),\ P \longmapsto P\circ\tau_{-\rho}$$

est un isomorphisme de W-modules car

$$\gamma(w.P)(\lambda) = (w.P)(\tau_{-\rho}\lambda)$$
$$= P(\tau_{-\rho}w^{-1}\tau_\rho\tau_{-\rho}\lambda)$$
$$= P(\tau_{-\rho}w^{-1}\lambda) = (\gamma P)(w^{-1}\lambda)$$
$$= (w(\gamma P))(\lambda).$$

2e étape : Notons $\theta = \mathrm{sym}^{-1}$ et

$$\eta = \mathrm{cores} : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^{W}.$$

On a $$gr(\gamma \circ \varphi) = gr(\eta \circ \theta).$$

Dém. : On a $gr(\gamma \circ \varphi) = gr(\gamma) \circ gr(\varphi)$ et clairement $gr(\gamma)$ est l'identité. On va montrer que $gr(\varphi) = gr(\eta \circ \theta)$. Soit $f \in \mathbb{N}$. Soit $z \in Z(\mathfrak{g}) \cap U_f(\mathfrak{g})$. Ecrivons

$$z = \sum \lambda_{q,m,p}\, u(q,m,p)$$

où la somme porte sur les q, m, p t.q. $|q| + |m| + |p| \leq f$, où $|.|$ désigne la somme des composantes. Notons $v(q,m,p)$ le monôme

$$y_{\beta_1}^{q_1} \cdots y_{\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \cdots H_n^{m_n} X_{\beta_1}^{p_1} \cdots X_{\beta_k}^{q_k}$$

calculé dans $S(\mathfrak{g})$. Notons $S_{f-1}(\mathfrak{g}) = S^0(\mathfrak{g}) \oplus \cdots \oplus S^{f-1}(\mathfrak{g})$.

Alors on a

$$\theta(z) \equiv \sum_{|q|+|m|+|p| \leq f} \lambda_{q,m,p}\, v(q,m,p) \mod S_{f-1}(\mathfrak{g})$$

et donc

$$\eta \circ \theta(z) \equiv \sum_{|m| = f} \lambda_{0,m,0}\, v(0,m,0) \mod S_{f-1}(\mathfrak{h}).$$

D'où $$\eta \circ \theta(z) \equiv \varphi(z) \mod S_{f-1}(\mathfrak{h}).$$

3e étape : Indépendance du choix de B.

Soient $\lambda \in P_+$, V le module simple de dimension finie de plus haut poids λ et χ son caractère central. Soit $w \in W$, $S' = w(S)$ et φ', γ' les isomorphismes associés à S'. Le plus haut poids de V p.r. à S' est $w\lambda$.

Soit $z \in Z(\mathfrak{g})$. On sait qu'on a

$$\varphi(z)(\lambda) = \chi(z) = \varphi'(z)(w\lambda).$$

Donc

$$\begin{aligned} \gamma\circ\varphi(z)(w\lambda + w\rho) &= \varphi(z)(w\lambda + w\rho - \rho) \\ &= \varphi(z)(w\cdot\lambda) \\ &= \varphi(z)(\lambda) \\ &= \varphi'(z)(w\lambda) \\ &= \varphi'(z)\circ\tau_{-w\rho}(w\lambda + w\rho) \\ &= \gamma'\circ\varphi'(z)\,(w\lambda + w\rho). \end{aligned}$$

Ceci est valable pour tout $\lambda \in P_+$. Donc les fonctions polynomiales $\gamma\circ\varphi(z)$ et $\gamma'\circ\varphi'(z)$ coïncident sur $wP_+ + w\rho$. Donc elles sont égales. ✓

Prop. : Soient $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$. Alors on a

$$\chi_\lambda = \chi_{\lambda'} \iff \lambda' \in W\cdot\lambda.$$