Université Paris Diderot – Paris 7 17/12/2018
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et J.-Y. Ducloux

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes II

Un corrigé de l'examen

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.*

a) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. (1) Exhiber une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$; (2) décrire le système de racines associé ; (3) exhiber une base du système de racines ; (4) décrire le diagramme de Dynkin associé ; (5) décrire le groupe de Weyl.

Solution : (1) Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est formée par les matrices diagonales $n \times n$ de trace 0. (2) Soit $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ la forme linéaire qui envoie une matrice diagonale sur son i-ème coefficient diagonal. Pour des entiers $1 \leq i, j \leq n$, posons $\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Alors le systèmes de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est formé des vecteurs α_{ij}, où $i \neq j$. (3) Une base de R est formé des vecteurs $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-1,n}$. (4) Le diagramme de Dynkin est une chaîne de $n-1$ sommets chacun lié au suivant par une arête. (5) Le groupe de Weyl s'identifie au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agissant sur $\mathfrak{h}$ en permutant les ε_i.

b) Enoncer la classification des systèmes de racines réduits irréductibles. Quel est le lien avec les algèbres de Lie simples complexes ?

Solution : Les systèmes de racines réduits irréductibles sont classifiés par leurs diagrammes de Dynkin. Ces diagrammes sont listés dans la figure (1) où l'on indique en plus le nombre de Coxeter h. L'application qui, à une algèbre simple complexe, associé son système de racines induit une bijection entre les classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie simples complexes et le classes d'isomorphisme de diagrammes de Dynkin.

c) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $U\mathfrak{g}$ son algèbre enveloppante. Enoncer le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt pour $U\mathfrak{g}$.

Solution : Soient $(X_i)_{i \in I}$ une base de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}$. On choisit un ordre total sur I. Soit $j : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ le morphisme canonique. Alors l'ensemble des monômes ordonnés en les $j(X_i)$ forme une base de $U\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}$.

d) Soit V un espace vectoriel. Rappeler la définition de l'algèbre de Lie libre sur V à l'aide d'une propriété universelle.

Solution : L'algèbre de Lie libre LV est munie d'une application linéaire $j : V \to LV$ telle que pour toute application linéaire $f : V \to \mathfrak{g}$ vers une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : LV \to \mathfrak{g}$ tel que $\varphi \circ j = f$.

Nom	Diagramme	n	h
A_n	$\circ$ —— $\circ$ —— $\ldots$ —— $\circ$	≥ 1	$n+1$
B_n	$\circ \overset{(2,1)}{——} \circ$ —— $\ldots$ —— $\circ$	≥ 2	$2n$
C_n	$\circ \overset{(1,2)}{——} \circ$ —— $\ldots$ —— $\circ$	≥ 3	$2n$
D_n	$\begin{array}{lllllll} \circ & \searrow & & & & & \\ & & \circ & - & \cdots & - & \circ \\ \circ & \nearrow & & & & & \end{array}$	≥ 4	$2n-2$
E_6	$\begin{array}{ccccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & \vert & & & & \\ & & & & \circ & & & & \end{array}$	6	12
E_7	$\begin{array}{ccccccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & \vert & & & & & & \\ & & & & \circ & & & & & & \end{array}$	7	18
E_8	$\begin{array}{ccccccccccccc} \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ & & & & \vert & & & & & & & & \\ & & & & \circ & & & & & & & & \end{array}$	8	30
F_4	$\circ$ —— $\circ \overset{(2,1)}{——} \circ$ —— $\circ$	4	12
G_2	$\circ \overset{(3,1)}{——} \circ$	2	6

Figure 1: Diagrammes de Dynkin

e) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base S du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Rappeler la définition du module de Verma $\Delta(\lambda)$ associé à une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ et la définition du module simple $L(\lambda)$.

Solution : Soit R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ de racines simples (i.e. racines dans S). Soient

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha \quad \textit{et} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Soit $\mathbb{C}_\lambda$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni de l'action de $\mathfrak{b}$ telle que $\mathfrak{h}$ agit par λ et $\mathfrak{n}$ par 0. Le module de Verma $\Delta(\lambda)$ est le produit tensoriel $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda$. Le module simple $L(\lambda)$ est l'unique quotient simple de $\Delta(\lambda)$.

f) Quel est le caractère de $\Delta(\lambda)$?

Solution : Soit

$$K = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}.$$

Alors le caractère de $\Delta(\lambda)$ est Ke^λ.

g) A quelle condition le module $L(\lambda)$ est-il de dimension finie ? Quel est alors son caractère ? Sa dimension ?

Solution : Le module $L(\lambda)$ est de dimension fini si et seulement si λ est un poids dominant, c'est-à-dire qu'on a $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour toute racine $\alpha \in S$. Son caractère est alors donné par la formule de Weyl

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = J(e^{\lambda+\rho})/J(e^\rho) \ ,$$

où ρ est la demi-somme des racines positives et J l'antisymétrisation : $J(f) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) wf$. Sa dimension est donnée par la formule de la dimension de Weyl

$$\dim(L(\lambda)) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}.$$

2) Soit A un anneau noethérien à gauche (toute suite croissante d'idéaux à gauche devient stationnaire). Soit x un élément de A tel que la multiplication $a \mapsto ax$ est une application injective de A dans A (on dit que x est un non diviseur de 0 à droite). Soit I un idéal à gauche non nul de A. On se propose de montrer que $I \cap Ax$ est non nul.

   a) Supposons que $I \cap Ax$ est nul. Montrer que la somme

   $$I + Ix + Ix^2 + \ldots + Ix^n + \ldots$$

   est directe.

   Solution : Supposons que nous avons une relations de dépendance linéaire

   $$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

   pour des a_i dans I. Choisissons n minimal. Alors a_0 est dans $I \cap Ax = 0$ donc $a_0 = 0$ et on a la relation

   $$(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1})x = 0.$$

   Comme x est un non diviseur de 0 à droite, on obtient la relation

   $$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} = 0$$

   ce qui contredit la minimalité de n.

   b) Déduire du point précédent que si $I \cap Ax$ est nul, alors $I = 0$.

   Solution : Le point précédent montre que si $I \cap Ax$ est nul et I est non nul, alors la suite d'idéaux à gauche

   $$I_n = I + Ix + \ldots + Ix^n \ , \ n \in \mathbb{N},$$

   est strictement croissante. Cela contredit la noethérianité à gauche de A. Donc I est nul.

   c) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Montrer que l'intersection de deux idéaux à gauche non nuls I et J de $U\mathfrak{g}$ est non nulle.

   Solution : On sait que l'algèbre enveloppante $A = U\mathfrak{g}$ est intègre. Comme $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, elle est en plus noethérienne à gauche. Soit x un élément non nul de J. Par le point précédent, l'intersection $I \cap Ax$ est non nulle. Or clairement on a $I \cap Ax \subseteq I \cap J$.

3) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base S du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ de racines simples. On note $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Soit λ une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$.

a) Soit μ une deuxième forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. Montrer que tout morphisme non nul $f : \Delta(\mu) \to \Delta(\lambda)$ est injectif.

Solution : Par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, on a un isomorphisme de $U\mathfrak{n}^-$-modules

$$\Delta(\lambda) = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda \xleftarrow{\sim} U\mathfrak{n}^- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = U\mathfrak{n}^-.$$

De même pour $\Delta(\mu)$. Le morphisme f donne donc lieu à un endomorphisme non nul de $U\mathfrak{n}^-$-modules $g : U\mathfrak{n}^- \to U\mathfrak{n}^-$. Un tel endomorphisme est donné par la multiplication à droite avec l'élément non nul $g(1)$. Comme $U\mathfrak{n}^-$ est intègre, la multiplication à droite par $g(1)$ est injective. Donc f est injectif.

b) Montrer que deux sous-modules L et M non nuls de $\Delta(\lambda)$ ont une intersection non nulle. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.

Solution : Par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, on a un isomorphisme de $U\mathfrak{n}^-$-modules

$$\Delta(\lambda) = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda \xleftarrow{\sim} U\mathfrak{n}^- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = U\mathfrak{n}^-.$$

Par cet isomorphisme, L et M s'identifient à deux idéaux à gauche non nuls de $U\mathfrak{n}^-$. Comme $\mathfrak{n}^-$ est de dimension finie, le point c) de l'exercice précédent permet de conclure que $L \cap M$ est non nul.

c) Montrer que $\Delta(\lambda)$ contient un plus petit sous-module non nul V et que V est simple. Indication : on pourra utiliser un résultat du cours.

Solution : On a vu en cours que tout module de Verma $\Delta(\lambda)$ contient un sous-module simple V. Si L est un sous-module non nul de $\Delta(\lambda)$, alors $L \cap V$ est non nul par le point précédent. Comme V est simple, on a $L \cap V = V$ et $V \subseteq L$. Donc V est le plus petit sous-module non nul de $\Delta(\lambda)$.

d) Montrer que V est isomorphe à $\Delta(\mu)$ pour une forme linéaire μ sur $\mathfrak{h}$. Indication : on pourra utiliser la question a).

Solution : On a vu en cours que V est isomorphe à un module simple $L(\mu)$ pour un μ dans $W.\lambda$. D'où un morphisme surjectif $f : \Delta(\mu) \to V$. La composée de f avec l'inclusion $V \subset \Delta(\lambda)$ est un morphisme non nul de $\Delta(\mu)$ vers $\Delta(\lambda)$. Il est donc injectif par le point a) et on a $\Delta(\mu) = L(\mu)$.

e) Montrer que pour λ donné, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour μ.

Solution : Comme $\Delta(\mu)$ a même caractère central que $\Delta(\lambda)$, on a $\mu \in W.\lambda$, qui est fini car W est fini.

4) On garde les notations de l'exercice précédent. Soient λ et μ deux formes linéaires sur $\mathfrak{h}$. On se propose de montrer que l'espace des morphismes de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$ est de dimension au plus un.

a) Montrer que l'espace des endomorphismes de $\Delta(\lambda)$ est de dimension 1.

Solution : Par la propriété universelle de $\Delta(\lambda)$, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda, \Delta(\lambda))$ s'identifie avec l'espace des vecteurs de poids λ dans $\Delta(\lambda)$ qui sont annulés par $\mathfrak{n}$. Or on sait que $\Delta(\lambda)^\lambda$ est de dimension 1 et annulé par $\mathfrak{n}$.

b) Soient f_1 et f_2 deux morphismes non nuls de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$ qui ont même image. Montrer qu'il existe un automorphisme g de $\Delta(\lambda)$ tel que $f_2 = f_1 \circ g$ et déduire que f_1 et f_2 sont proportionnels. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.

Solution : Par le point a) de l'exercice précédent, f_1 et f_2 sont injectifs. Comme ils ont même image, on peut définir $g(m) = f_1^{-1}f_2(m)$ pour tout m dans $\Delta(\lambda)$. Par le point précédent, g est la multiplication par un scalaire. Donc f_1 et f_2 sont proportionnels.

c) Supposons que $\Delta(\lambda)$ est simple. Soient f_1 et f_2 deux morphismes non nuls de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$. Montrer que f_1 et f_2 sont proportionnels. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.

Solution : Comme f_1 et f_2 sont non nuls et $\Delta(\lambda)$ est simple, les images de f_1 et f_2 sont des sous-modules simples de $\Delta(\mu)$. Par le point c) de l'exercice précédent, ces images sont égales au plus petit sous-module non nul de $\Delta(\mu)$. Par le point précédent, f_1 et f_2 sont proportionnels.

d) Par le point d) de l'exercice précédent, il existe un module simple $\Delta(\nu)$ et un morphisme injectif $g : \Delta(\nu) \to \Delta(\lambda)$. Montrer que g induit une injection

$$\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \to \mathrm{Hom}(\Delta(\nu), \Delta(\mu))$$

et conclure.

Solution : Soit f un morphisme $\Delta(\lambda) \to \Delta(\mu)$ tel que $f \circ g = 0$. Alors f n'est pas injectif et doit être nul par le point a) de l'exercice précédent. Donc l'application

$$\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \to \mathrm{Hom}(\Delta(\nu), \Delta(\mu)) \ , \ f \mapsto f \circ g$$

est injective. Par le point précédent, l'espace à droite est de dimension ≤ 1. Donc $\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu))$ est de dimension ≤ 1.

5) On garde les notations de l'exercice 3). Soit d un entier supérieur ou égal à 1.

a) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension d.

Solution : Soient ω_i, $1 \leq i \leq n$, les poids fondamentaux. Notons

$$\lambda = m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n$$

un poids dominant tel que $\dim L(\lambda) = d$. D'après la formule de la dimension de Weyl, on a

$$d \prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha) = \prod_{\alpha \in R^+} (\lambda + \rho, \alpha).$$

Clairement, on a

$$\prod_{\alpha \in R^+} (\lambda + \rho, \alpha) \geq \prod_{i=1}^{n} (\lambda + \rho, \alpha_i) = \prod_{i=1}^{n} (m_i + 1) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Comme les m_i sont des entiers positifs, cela montre qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de poids dominants $\lambda = m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n$ tels que $\dim L(\lambda) \leq d$.

b) On note p la moitié de la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Construire un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension d^p.

Solution : Notons que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$. Comme on a $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ pour toute racine α, le nombre p est égal au cardinal de R^+. Considérons le poids $\lambda = (d-1)\rho$. D'après la formule de la dimension de Weyl, on a

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} (\lambda + \rho)}{\prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha)} = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} (d\rho, \alpha)}{\prod_{\alpha \in R^+} (\rho, \alpha)} = d^p.$$