Université Paris Diderot – Paris 7 17/12/2019
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et J.-Y. Ducloux

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes II

Un corrigé de l'examen du 17/12/2019

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.* Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ de racines simples. On note $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

a) Rappeler la description de $\mathfrak{g}$ par des générateurs H_i, X_i, Y_i, $1 \leq i \leq n$, et les relations dues à Weyl et Serre.
Solution. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit $H_i \in \mathfrak{h}$ comme la coracine de $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$, on choisit $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$ non nul et on choisit $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ tel que $[X_i, Y_i] = H_i$. On pose $n(i,j) = \alpha_i^*(\alpha_j)$. Alors $\mathfrak{g}$ est présentée par ces générateurs et les relations de Weyl

$$
\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0\,, \quad \forall i, j\,,\\
&[X_i, Y_i] = H_i\,, \quad \forall i\,,\\
&[X_i, Y_j] = H_i\,, \quad \forall i \neq j\,,\\
&[H_i, X_j] = n(i,j) X_j\,,\ [H_i, Y_j] = -n(i,j) Y_j\,, \quad \forall i, j\,,
\end{aligned}
$$

et le relations de Serre

$$\mathrm{ad}(X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{ad}(Y_i)^{-n(i,j)+1}(Y_j) = 0$$

pour tous $i \neq j$.

b) Rappeler la définition du module de Verma $\Delta(\lambda)$ associé à une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ et la définition du module simple $L(\lambda)$.
Solution. Soit R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ de racines simples (i.e. racines dans S). Soient

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha \quad \textit{et} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Soit $\mathbb{C}_\lambda$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni de l'action de $\mathfrak{b}$ telle que $\mathfrak{h}$ agit par λ et $\mathfrak{n}$ par 0. Le module de Verma $\Delta(\lambda)$ est le produit tensoriel $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_\lambda$. Le module simple $L(\lambda)$ est l'unique quotient simple de $\Delta(\lambda)$.

c) Quel est le caractère de $\Delta(\lambda)$?

Solution. Soit
$$K = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}.$$
Alors le caractère de $\Delta(\lambda)$ est Ke^{λ}.

d) A quelle condition le module $L(\lambda)$ est-il de dimension finie ? Quel est alors son caractère ? Sa dimension ?

Solution. Le module $L(\lambda)$ est de dimension fini si et seulement si λ est un poids dominant, c'est-à-dire qu'on a $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour toute racine $\alpha \in S$. Son caractère est alors donné par la formule de Weyl
$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = J(e^{\lambda+\rho})/J(e^{\rho}) \,,$$
où ρ est la demi-somme des racines positives et J l'antisymétrisation : $J(f) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) wf$. Sa dimension est donnée par la formule de la dimension de Weyl
$$\dim(L(\lambda)) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}.$$

e) Rappeler la définition de la catégorie $\mathcal{O}$.

Solution. La catégorie $\mathcal{O}$ est formée des $\mathfrak{g}$-modules M tels que

1) M est de type fini comme $U\mathfrak{g}$-module,
2) M est $\mathfrak{h}$-diagonalisable, i.e. $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M^{\lambda}$,
3) pour tout $m \in M$, l'espace $U(\mathfrak{n}).m$ est de dimension finie.

Les morphismes $L \to M$ entre deux objets de $\mathcal{O}$ sont tous les morphismes de $\mathfrak{g}$-modules.

2) On garde les notations de la question 1).

a) Soient V un $\mathfrak{g}$-module qui a un poids maximal $\mu \in \mathfrak{h}^*$ et v un vecteur non nul de poids μ. Montrer que v est primitif.

Solution. Pour tout $1 \leq i \leq n$, le vecteur $X_i v$ est de poids $\mu + \alpha_i$. Comme μ est maximal, l'espace $V^{\mu+\alpha_i}$ s'annule. Donc on a $X_i v = 0$ et $\mathfrak{n}.v = 0$ car $\mathfrak{n}$ est engendré par les X_i. Comme v est non nul de poids μ, cela signifie que v est primitif de poids μ.

b) Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie engendré par un vecteur primitf. Montrer que V est simple.

Solution. On a vu en cours qu'un module engendré par un vecteur primitif est indécomposable. Donc V est indécomposable. Comme V est de dimension finie, il est aussi semi-simple (theorème de Weyl). Or un module semi-simple indécomposable est simple car tout sous-module y est un facteur direct.

3) On garde les notations de la question 1). Par λ et μ on désigne des éléments de $\mathfrak{h}^*$.

a) Montrer que la projection $p : \Delta(\lambda) \to L(\lambda)$ se factorise de façon unique à travers tout morphisme non nul surjectif de $\mathfrak{g}$-modules $q : \Delta(\lambda) \to M$.

Solution. On sait que le noyau de p est l'unique sous-module maximal de $\Delta(\lambda)$. En particulier, il contient le noyau de q, qui est un sous-module propre car $q \neq 0$. D'où l'existence d'un unique morphisme $f : M \to L(\lambda)$ tel que $f \circ q = p$.

b) Supposons que $\mu < \lambda$. Soient M un module $\mathfrak{h}$-diagonalisable et $p : M \to \Delta(\lambda)$ un morphisme surjectif dont le noyau L est un module de plus haut poids μ. Montrer qu'il existe un morphisme $s : \Delta(\lambda) \to M$ tel que $p \circ s = \mathrm{Id}_{\Delta(\lambda)}$.
Solution. On a une suite exacte

$$0 \to L \to M \xrightarrow{p} \Delta(\lambda) \to 0.$$

L'ensemble des poids de M est donc la réunion des ensembles de poids de $\Delta(\lambda)$ et de L. Comme L est un module de plus haut poids μ, ses poids sont tous $\leq \mu$. Donc λ est maximal parmi les poids de M. L'espace M^λ est donc annulé par $\mathfrak{n}$ et se surjecte sur $\Delta(\lambda)^\lambda$. Ainsi, il existe un vecteur primitif $m \in M^\lambda$ dont l'image par p est le générateur canonique $v_\lambda = 1 \otimes 1$ de $\Delta(\lambda)$. Par la propriété universelle de $\Delta(\lambda)$, il existe un morphisme $s : \Delta(\lambda) \to M$ tel que $p \circ s(v_\lambda) = v_\lambda$. Comme v_λ engendre $\Delta(\lambda)$, cela implique que $p \circ s = Id_{\Delta(\lambda)}$.

4) On garde les notations de la question 1). Par λ et μ on désigne des éléments de $\mathfrak{h}^*$. Notons $\mathfrak{g}^{op}$ l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni du crochet $[X, Y]^{op} = [Y, X]$. Un *anti-automorphisme* de $\mathfrak{g}$ est un isomorphisme $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{op}$.

a) Montrer que $\mathfrak{g}$ admet un unique anti-automorphism τ tel que $\tau(H) = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, $\tau(X_i) = Y_i$ et $\tau(Y_i) = X_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Décrire explicitement τ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.
Solution. Les éléments H_i, Y_i, X_i, $1 \leq i \leq n$, vérifient les relations de Serre et de Weyl dans $\mathfrak{g}^{op}$. Il existe donc un unique morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{op}$ tel que $\varphi(H_i) = H_i$, $\varphi(X_i) = Y_i$ et $\varphi(Y_i) = X_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$. Clairement φ est un isomorphisme d'inverse $\varphi^{op} : \mathfrak{g}^{op} \to \mathfrak{g}$ qui est la même application linéaire que φ. Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, le morphisme φ est égal à la transposition $X \mapsto {}^tX$.

b) Soit M un $\mathfrak{g}$-module. On définit $M^{*\tau}$ comme l'espace dual $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$ muni de l'action de $\mathfrak{g}$ définie par

$$(Xf)(m) = f(\tau(X)m)$$

pour $X \in \mathfrak{g}$, $f \in M^*$ et $m \in M$. Montrer que $M^{*\tau}$ est bien un $\mathfrak{g}$-module à gauche.
Solution. Clairement, l'espace M^* muni de l'action définie par $(fX)(m) = f(Xm)$ est un $\mathfrak{g}$-module à droite. Ainsi le morphisme $\rho : X \mapsto (f \mapsto fX)$ est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}^{op} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$. En le composant avec $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{op}$, on obtient un morphisme d'algèbres de Lie $\rho \circ \tau : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ qui correspond à la structure donnée de $\mathfrak{g}$-module.

c) Soit M un $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{h}$-diagonalisable. Soit $M^\vee$ le sous-espace de M^* formé de toutes les formes f sur M telles que $f(M^\lambda) = 0$ pour tous les $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ sauf un nombre fini. Montrer que $M^\vee$ est un $\mathfrak{g}$-sous-module de $M^{*\tau}$ et qu'il est $\mathfrak{h}$-diagonalisable.
Solution. Soit $f \in M^\vee$ et soit Λ l'ensemble fini des formes linéaires $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ telles que $f(M^\lambda) \neq 0$. Pour $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, on a $\tau(X)M^\lambda \subseteq M^{\lambda-\alpha}$. Il s'ensuit que Xf s'annule sauf sur les $M^{\lambda+\alpha}$ où $\lambda \in \Lambda$. Pour $H \in \mathfrak{h}$, Hf s'annule sur M^λ si $\lambda \notin \Lambda$. Il s'ensuit que $Xf(M^\mu) = 0$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et pour tous sauf un nombre fini de μ de façon que $M^\vee$ est bien un sous-module. Il est clair qu'on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} (M^\lambda)^* \xrightarrow{\sim} M^\vee$$

ce qui montre que $M^\vee$ est encore $\mathfrak{h}$-diagonalisable.

d) Montrer que si M est $\mathfrak{h}$-diagonalisable et que ses poids sont tous de multiplicité finie, alors c'est aussi le cas pour $M^\vee$ et le caractère $\mathrm{ch}(M^\vee)$ est égal à $\mathrm{ch}(M)$. Montrer que dans cas, le morphisme canonique $M \to (M^\vee)^\vee$ est inversible.

Solution. On sait déjà que $M^\vee$ est $\mathfrak{h}$-diagonalisable et que $(M^\vee)^\lambda$ est le dual de M^λ. Cela implique immédiatement la première affirmation. Pour la seconde, on observe que le morphisme induit dans les espaces de poids est inversible.

e) Montrer que pour toute suite exacte

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

de $\mathfrak{g}$-modules $\mathfrak{h}$-diagonalisables, la suite induite

$$0 \to N^\vee \to M^\vee \to L^\vee \to 0$$

est exacte.

Solution. Comme les modules sous considération sont $\mathfrak{h}$-diagonalisables, il suffit de montrer, pour $\lambda \in \mathfrak{h}$, l'exactitude de la suite

$$0 \to (N^\vee)^\lambda \to (M^\vee)^\lambda \to (L^\vee)^\lambda \to 0.$$

Cette suite est bien exacte en tant que duale (sur $\mathbb{C}$) de la suite

$$0 \to L^\lambda \to M^\lambda \to N^\lambda \to 0.$$

f) Montrer que le module $L(\lambda)^\vee$ est simple et isomorphe à $L(\lambda)$.

Solution. Comme $L(\lambda)$ est simple, il admet exactement deux sous-modules. Par les deux points précédents, son dual $L(\lambda)^\vee$ admet exactement deux modules quotients. Cela montre que $L(\lambda)^\vee$ est bien simple. En outre, c'est un module de plus haut poids λ. Donc il est isomorphe à $L(\lambda)$.

g) Soit M un objet de la catégorie $\mathcal{O}$. Montrer que $M^\vee$ appartient encore à $\mathcal{O}$ et qu'on a

$$[M : L(\lambda)] = [M^\vee : L(\lambda)].$$

Solution. Par le point c), le module $M^\vee$ est encore $\mathfrak{h}$-diagonalisable. Si f appartient à $(M^\vee)^\lambda = (M^\lambda)^*$, alors $X_\alpha f$ appartient à $(M^\vee)^{\lambda+\alpha} = (M^{\lambda+\alpha})^*$ Il s'ensuit que $U(\mathfrak{n}).f$ est de dimension finie. Il résulte des points e) et f) que $M^\vee$ est encore un module de longueur finie. Or tout module de longueur finie est de type fini comme le montre une récurrence facile sur la longueur. Pour l'égalité des multiplicités, on observe que $[M : L(\lambda)]$ est égal à $[M^\vee : L(\lambda)^\vee]$ et que $L(\lambda)^\vee$ est isomorphe à $L(\lambda)$ d'après le point f).

h) Montrer que $\Delta(\lambda)^\vee$ admet un unique sous-module simple et que ce sous-module est isomorphe à $L(\lambda)$.

Solution. On sait que $\Delta(\lambda)$ admet un unique quotient simple et que ce quotient est isomorphe à $L(\lambda)$. Donc $\Delta(\lambda)^\vee$ admet un unique sous-module simple et ce sous-module est isomorphe à $L(\lambda)^\vee$. Or ce dernier module est isomorphe à $L(\lambda)$.

i) Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Montrer que tout sous-module non nul M de $\Delta(\lambda)^\vee$ contient le sous-module simple $L(\lambda)$. Montrer que les autres simples $L(\mu)$ apparaissant dans une suite de Jordan–Hölder de $\Delta(\lambda)^\vee$ vérifient $\mu < \lambda$.

Solution. Cela résulta par application de la dualité $?^\vee$ de l'exercice 3 a) et du fait que les autres simples $L(\mu)$ apparaissant dans une suite de Jordan–Hölder de $\Delta(\lambda)$ vérifient $\mu < \lambda$.

j) Montrer que pour tout morphisme non nul $f : \Delta(\mu) \to \Delta(\lambda)^\vee$, l'image M de f contient $L(\lambda)$. Déduire que $\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\lambda)^\vee)$ est de dimension 1 et que $\mathrm{Hom}(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)^\vee) = 0$ pour $\mu \neq \lambda$.

Solution. L'image M de f est un sous-module non nul de $\Delta(\lambda)^\vee$. Elle contient $L(\lambda)$ par le point précédent. Comme M est un module de plus haut poids μ, on doit avoir $\mu \geq \lambda$. Comme M a un quotient $L(\mu)$, on doit avoir $\mu \leq \lambda$ par le point précédent. Donc $\mu = \lambda$ et $M = L(\lambda)$. Ainsi tout morphisme $\Delta(\lambda) \to \Delta(\lambda)^\vee$ se factorise de façon unique par $L(\lambda) \subseteq \Delta(\lambda)^\vee$. Comme $\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda), L(\lambda))$ est de dimension 1, l'espace $\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\lambda)^\vee)$ est de dimension 1. Comme on a $\mathrm{Hom}(\Delta(\mu), L(\lambda)) = 0$ pour $\mu \neq \lambda$, on a aussi $\mathrm{Hom}(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)^\vee) = 0$ pour $\mu \neq \lambda$.

k) Montrer que toute suite exacte de $\mathcal{O}$

$$0 \to \Delta(\lambda)^\vee \to M \xrightarrow{p} \Delta(\mu) \to 0$$

se scinde. Indication : on pourra distinguer des cas suivant que μ est maximal ou non parmi les poids de M et utiliser la dualité $?^\vee$ dans ce dernier cas.

Solution. Si μ est maximal parmi les poids de M, alors M^μ contient un vecteur primitif m tel que $p(m) = v_\mu = 1 \otimes 1$. Alors par la propriété universelle de $\Delta(\mu)$, il existe $s : \Delta(\mu) \to M$ tel que $s(v_\mu) = m$ et alors $p \circ s = Id_{\Delta(\mu)}$. Comme l'ensemble des poids de M est la réunion des ensembles de poids de $\Delta(\lambda)$ et de $\Delta(\mu)$, si μ n'est pas maximal parmi les poids de M, il existe un poids $\nu > \lambda$ de M. Alors ν n'est pas un poids de $\Delta(\lambda)$ et donc un poids de $\Delta(\mu)^\vee$ et on a $\mu \geq \nu > \lambda$. En appliquant le foncteur de dualité à la suite donnée, on obtient une suite

$$0 \to \Delta(\mu)^\vee \to M^\vee \to \Delta(\lambda) \to 0$$

où $\lambda > \mu$. Alors λ est maximal parmi les poids de M et la suite se scinde. Donc la suite de départ se scinde aussi.

l) Soit une suite exacte de $\mathcal{O}$

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \to \Delta(\mu) \to 0.$$

Montrer que pour tout morphisme $f : N \to \Delta(\lambda)^\vee$, il existe un morphisme $g : M \to \Delta(\lambda)^\vee$ tel que $g \circ i = f$.

Solution. Soit f un tel morphisme. Soit E le conoyau du morphisme

$$\begin{bmatrix} i \\ f \end{bmatrix} : N \to M \oplus \Delta(\lambda)^\vee.$$

Soit $j : \Delta(\lambda)^\vee \to E$ la composition de l'inclusion avec la projection. On vérifie que j est injectif et que son conoyau est canoniquement isomorphe à $\Delta(\mu)$. D'où une suite exacte

$$0 \to \Delta(\lambda)^\vee \xrightarrow{k} E \to \Delta(\mu) \to 0.$$

D'après le point k), cette suite se scinde. Il existe donc $l : E \to \Delta(\lambda)^\vee$ tel que $l \circ k$ est l'identité de $\Delta(\lambda)^\vee$. On obtient g en composant l avec l'application naturelle $M \to E$.

m) Supposons que $M \in \mathcal{O}$ admet une filtration standard. Montrer qu'on a

$$[M : \Delta(\lambda)]_\Delta = \dim \mathrm{Hom}(M, \Delta(\lambda)^\vee).$$

Indication : on pourra procéder par récurrence sur la longueur d'une filtration standard de M et utiliser les points j) et l).

Solution. On procède par récurrence sur la longueur de la filtration standard de M. Si on a $M = \Delta(\mu)$, l'affirmation résulte du point j). Supposons maintenant que nous avons une suite exacte

$$0 \to N \to M \to \Delta(\mu) \to 0\,,$$

oú N possède une filtration standard de longueur plus petite que celle de M. D'après le point l), l'inclusion de N induit une surjection

$$\mathrm{Hom}(M, \Delta(\lambda)^\vee) \to \mathrm{Hom}(N, \Delta(\lambda)^\vee).$$

Nous avons donc une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)^\vee) \to \mathrm{Hom}(M, \Delta(\lambda)^\vee) \to \mathrm{Hom}(N, \Delta(\lambda)^\vee) \to 0.$$

L'affirmation résulte de l'hypothèse de récurrence et du cas de longueur 1.

n) Montrer que l'on a la réciprocité de Bernstein–Gelfand–Gelfand

$$[P(\lambda) : \Delta(\mu)]_\Delta = [\Delta(\mu) : L(\lambda)].$$

Indication : on pourra montrer que les deux côtés valent $\dim \mathrm{Hom}(P(\lambda), \Delta(\mu)^\vee)$.

Solution. On a

$$[\Delta(\mu) : L(\lambda)] = [\Delta(\mu)^\vee : L(\lambda)]$$

par le point g),

$$[\Delta(\mu)^\vee : L(\lambda)] = \dim \mathrm{Hom}(P(\lambda), \Delta(\mu)^\vee)$$

d'après le cours et

$$\dim \mathrm{Hom}(P(\lambda), \Delta(\mu)^\vee) = [P(\lambda) : \Delta(\mu)]_\Delta$$

d'après le point m).