

**M2 Mathématiques Fondamentales**  
**Algèbres de Lie semi-simples complexes I**

**Un corrigé de l'examen du 31/10/2018**

*Avertissement : Les documents, calembrets et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps  $k = \mathbb{C}$ .*

1) *Questions de cours.*

- a) Définir la notion d'algèbre de Lie.

*Solution : Une algèbre de Lie est un  $k$ -espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni d'une application bilinéaire  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  telle que pour tous  $X, Y$  et  $Z$  dans  $\mathfrak{g}$ , on a*

a)  $[X, Y] = -[Y, X]$

b)  $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [X, [Y, Z]]$ .

- b) Définir la notion de  $\mathfrak{g}$ -module pour une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

*Solution : Un  $\mathfrak{g}$ -module est un espace vectoriel  $M$  muni d'une application bilinéaire  $\mathfrak{g} \times M \rightarrow M$  telle que, pour tous  $X \in \mathfrak{g}$  et  $m \in M$ , on a*

$$[X, Y]m = X(Ym) + Y(Xm).$$

- c) Définir la notion de morphisme entre algèbres de Lie.

*Solution : Si  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont des algèbres de Lie, un morphisme est une application linéaire  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  telle que  $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$  pour tous  $X, Y$  dans  $\mathfrak{g}$ .*

- d) Définir la notion d'algèbre de Lie résoluble. Par quelles opérations la classe des algèbres résolubles est-elle stable ?

*Solution : Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On définit la série dérivée de  $\mathfrak{g}$  par  $D(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  et  $D^{n+1}(\mathfrak{g}) = [D^n(\mathfrak{g}), D^n(\mathfrak{g})]$  pour  $n \geq 1$ . Alors  $\mathfrak{g}$  est résoluble s'il existe  $n \geq 1$  tel que  $D^n(\mathfrak{g}) = 0$ . La classe des algèbres résolubles est stable par passage aux sous-algèbres, aux quotients et aux extensions.*

- e) Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  deux idéaux résolubles. Montrer que  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  est résoluble. Indication : on pourra relier  $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ .

*Solution : L'algèbre  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$  est résoluble en tant que quotient de  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  est résoluble en tant qu'extension de  $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$  par  $\mathfrak{a}$ .*

- f) Définir, sous l'hypothèse que  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie, le radical  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  et la notion d'algèbre de Lie semi-simple. Montrer que  $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  est semi-simple.

*Solution : Le radical de  $\mathfrak{g}$  est le plus grand idéal résoluble. Il est égal à la somme des idéaux résolubles de  $\mathfrak{g}$ . L'algèbre  $\mathfrak{g}$  est semi-simple si son radical s'annule. Soit  $\mathfrak{a}$  un idéal résoluble de  $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ . Alors son image réciproque  $\mathfrak{b}$  dans  $\mathfrak{g}$  est résoluble en tant qu'extension de  $\mathfrak{a}$  par  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ . Mais alors  $\mathfrak{b}$  est contenu dans  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  et  $\mathfrak{a}$  s'annule. Donc  $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  est semi-simple.*

g) Énoncer le théorème de Weyl.

*Solution : Tout module de dimension finie sur une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple.*

2) Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie complexe de dimension finie et  $\mathfrak{r}$  son radical. On se propose de montrer qu'il existe une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$  (théorème de Levi).

a) Montrer que si  $\mathfrak{s}$  existe, elle est semi-simple.

*Solution : En effet, on a  $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ , qui est semi-simple car  $\mathfrak{r}$  est le radical de  $\mathfrak{g}$ .*

b) Dans le cas où  $\mathfrak{r} = 0$ , la sous-algèbre  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$  convient. On procède par récurrence sur la dimension  $n$  de  $\mathfrak{r}$  en supposant la conclusion du théorème de Levi réalisée pour toute algèbre de Lie dont le radical est de dimension  $< n$ .

Premier cas : supposons qu'il existe un idéal  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $0 \neq \mathfrak{a} \neq \mathfrak{r}$ . Montrer qu'il existe une sous-algèbre  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$  est semi-simple.

*Solution : Le radical de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  est  $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$  (car c'est un idéal résoluble et le quotient est isomorphe à  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ ). Par l'hypothèse de récurrence, il existe une sous-algèbre semi-simple  $\mathfrak{b}'$  dans  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  telle que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathfrak{b}' \oplus \mathfrak{r}/\mathfrak{a}$ . On prend pour  $\mathfrak{b}$  l'image réciproque de  $\mathfrak{b}'$  dans  $\mathfrak{g}$ .*

c) Montrer que le radical de  $\mathfrak{b}$  est  $\mathfrak{a}$ . Démontrer qu'il existe une sous-algèbre  $\mathfrak{s}$  dans  $\mathfrak{b}$  telle que  $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{a}$ . Montrer que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ .

*Solution : La sous-algèbre  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  est résoluble en tant que sous-algèbre de  $\mathfrak{r}$  et le quotient  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$  est semi-simple. Donc  $\mathfrak{a}$  est le radical de  $\mathfrak{b}$ . Par l'hypothèse de récurrence, il existe une sous-algèbre  $\mathfrak{s}$  dans  $\mathfrak{b}$  telle que  $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{a}$ . On a*

$$\mathfrak{s} + \mathfrak{r} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{r} = \mathfrak{b} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$$

et

$$\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{s} \cap (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{r}) = 0.$$

d) 2e cas : supposons que le centre  $\mathfrak{c}$  de  $\mathfrak{g}$  est égal à  $\mathfrak{r}$ . Montrer que la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et que, si  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$  est un sous-module supplémentaire de  $\mathfrak{r}$ , alors  $\mathfrak{s}$  est une sous-algèbre telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ .

*Solution : Comme  $\mathfrak{c} = \mathfrak{r}$ , la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$  est une représentation de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ , qui est une algèbre de Lie semi-simple. Par le théorème de Weyl, la représentation adjointe est donc semi-simple. Si  $\mathfrak{s}$  est un sous-module supplémentaire de  $\mathfrak{r}$ , on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$  et  $\mathfrak{s}$  est même un idéal de  $\mathfrak{g}$ , donc en particulier une sous-algèbre.*

e) 3e cas : à partir de maintenant, on suppose que  $\mathfrak{r} \neq 0$ , que les seuls idéaux de  $\mathfrak{g}$  contenus dans  $\mathfrak{r}$  sont  $0$  et  $\mathfrak{r}$  et que  $\mathfrak{r}$  est différent de  $\mathfrak{c}$ . Montrer que  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$  et que le centre  $\mathfrak{c}$  de  $\mathfrak{g}$  est égal à  $0$ .

*Solution : Comme  $\mathfrak{r}$  est résoluble, on a  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \neq \mathfrak{r}$ . Comme  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  contenu dans  $\mathfrak{r}$ , on doit avoir  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$ . Comme  $\mathfrak{c}$  est un idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ , il est contenu dans  $\mathfrak{r}$  donc égal à  $0$  ou à  $\mathfrak{r}$ . Par l'hypothèse,  $\mathfrak{c}$  est différent de  $\mathfrak{r}$  donc égal à  $0$ .*

- f) Soit  $M$  l'espace des applications linéaires  $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  telles que  $u(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{r}$  et que la restriction de  $u$  à  $\mathfrak{r}$  est la multiplication par un scalaire qu'on note  $\lambda(u)$ . Soit  $N \subset M$  le sous-espace formé des  $u$  tels que  $\lambda(u) = 0$ . Indiquer pourquoi  $N$  est de codimension 1 dans  $M$ . Soit  $P$  l'image de  $\mathfrak{r}$  par la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$ . Montrer que  $P \subseteq N$ .

*Solution :* Comme  $\lambda(u)$  est non nul quand  $u$  est une projection sur  $\mathfrak{r}$ , le sous-espace  $N$  est de codimension 1 dans  $M$ . Pour  $X \in \mathfrak{r}$  et  $Y \in \mathfrak{g}$ , on a  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$  qui est dans  $\mathfrak{r}$  et pour  $X \in \mathfrak{r}$  et  $Y \in \mathfrak{r}$ , on a  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y] = 0$ .

- g) Soit  $\sigma$  la représentation de  $\mathfrak{g}$  dans l'espace  $\text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  des applications linéaires de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}$  déduite de la représentation adjointe. Vérifier que

$$\sigma(X)(u) = [\text{ad}(X), u]$$

pour  $X \in \mathfrak{g}$  et  $u \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ . Montrer que  $\sigma(\mathfrak{g})M \subseteq N$  et que  $\sigma(\mathfrak{g})P \subseteq P$ . En particulier, les espaces  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont des  $\mathfrak{g}$ -sous-modules de  $\text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ .

*Solution :* Soient  $X \in \mathfrak{g}$  et  $u \in M$ . Pour  $Y \in \mathfrak{g}$ , on a

$$\sigma(X)(u)(Y) = [\text{ad}(X), u](Y) = \text{ad}(X)(u(Y)) - u([X, Y]) = [X, u(Y)] - u([X, Y])$$

qui appartient bien à  $\mathfrak{r}$ . Pour  $Y \in \mathfrak{r}$ , on a

$$\sigma(X)(u)(Y) = [\text{ad}(X), u](Y) = [X, \lambda(u)Y] - \lambda(u)[X, Y] = 0.$$

Donc  $\sigma(\mathfrak{g})M \subseteq N$ . Soient  $X \in \mathfrak{g}$  et  $Y \in \mathfrak{r}$ . On a

$$\sigma(X)(\text{ad}(Y)) = [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)] = \text{ad}([X, Y])$$

qui appartient bien à  $P$  car  $[X, Y] \in \mathfrak{r}$ .

- h) Montrer que pour  $X \in \mathfrak{r}$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$  et  $u \in M$ , on a

$$(\sigma(X)u)(Y) = -\lambda(u)[X, Y] \tag{1}$$

de façon qu'on a  $\sigma(\mathfrak{r})M \subseteq P$ .

*Solution :* On a

$$(\sigma(X)u)(Y) = [\text{ad}(X), u](Y) = [X, u(Y)] - u([X, Y]) = -\lambda(u)[X, Y]$$

car  $[X, u(Y)]$  est dans  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$  et  $[X, Y]$  dans  $\mathfrak{r}$ .

- i) Montrer que le  $\mathfrak{g}$ -module  $M/P$  est semi-simple et que le quotient  $(M/P)/(N/P) = M/N$  est la représentation triviale.

*Solution :* Comme on a  $\sigma(\mathfrak{r})M \subseteq P$ , la représentation  $\sigma'$  induite par  $\sigma$  dans  $M/P$  s'annule sur  $\mathfrak{r}$  et  $M/P$  devient un module sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ , qui est semi-simple. Par le théorème de Weyl,  $M/P$  est un module semi-simple. Le quotient  $M/N$  est un  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ -module de dimension 1. D'après g), on a  $\mathfrak{g}.M \subseteq N$  et  $M/N$  est donc la représentation triviale.

- j) Montrer qu'il existe  $u_0 \in M$  tel que  $\lambda(u_0) = -1$  et  $\sigma(\mathfrak{g})u_0 \subseteq P$ .

*Solution :* Soit  $S/P$  un sous-module supplémentaire de  $N/P$  dans  $M/P$ . Alors  $S/P$ , qui est isomorphe à  $M/N$ , est la représentation triviale. La forme  $\lambda : M \rightarrow k$  passe au quotient  $M/P$  en une forme linéaire de noyau  $N/P$  et donc non nulle sur  $S/P$ . On choisit  $u_0$  comme image réciproque d'un générateur de  $S/P$  tel que  $\lambda(u_0) = -1$ . Alors on a  $\sigma(\mathfrak{g})u_0 \subseteq P$ .

- k) Montrer que pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ , il existe un unique  $\psi(X) \in \mathfrak{r}$  tel que  $\sigma(X)u_0 = \text{ad}\psi(X)$ . Montrer que  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{r}$  est linéaire et que  $\psi(X) = X$  pour tout  $X \in \mathfrak{r}$ .

*Solution :* On sait que  $\sigma(X)u_0$  est dans  $\text{ad}(\mathfrak{r})$ . Comme le centre  $\mathfrak{c}$  s'annule, il existe un unique  $\psi(X) \in \mathfrak{r}$  tel que  $\sigma(X)u_0 = \text{ad}\psi(X)$ . Comme  $\sigma$  et  $\text{ad}$  sont linéaires, l'application  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{r}$  est linéaire. Par l'équation (??), on a  $\psi(X) = X$  pour  $X \in \mathfrak{r}$ .

- l) Montrer que  $\mathfrak{s} = \ker \psi$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ .

*Solution :* Comme  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{r}$  est une projection sur  $\mathfrak{r}$ , son noyau  $\mathfrak{s}$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{r}$ . Comme  $\mathfrak{s}$  est l'ensemble des  $X \in \mathfrak{g}$  tels que  $\sigma(X)u_0 = 0$  et que  $\sigma$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ , le sous-espace  $\mathfrak{s}$  est une sous-algèbre.