Université Paris Diderot – Paris 7 30/10/2019
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et J.-Y. Ducloux

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes I

Un corrigé de l'examen du 30/10/2019

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.*

a) Définir la notion d'algèbre de Lie.
Solution : Une algèbre de Lie est un k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telle que pour tous X, Y et Z dans $\mathfrak{g}$, on a
a) [X,X]=0
b) [X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]]+[Y,[X,Z]].

b) Définir la notion de $\mathfrak{g}$-module pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
Solution : Un $\mathfrak{g}$-module est un espace vectoriel M muni d'une application bilinéaire $\mathfrak{g} \times M \to M$ telle que, pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et $m \in M$, on a

$$[X, Y]m = X(Ym) - Y(Xm).$$

c) Définir la notion d'algèbre de Lie nilpotente. Par quelles opérations la classe des algèbres de Lie nilpotentes est-elle stable ?
Solution : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On définit la série centrale descendante de $\mathfrak{g}$ par $C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ et $C^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})]$ pour $n \geq 1$. Alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente s'il existe $n \geq 1$ tel que $C^n(\mathfrak{g}) = 0$. La classe des algèbres nilpotentes est stable par passage aux sous-algèbres, aux quotients et aux extensions centrales, c'est-à-dire que si l'on a une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_3 \to 0$$

telle que $\mathfrak{g}_3$ est nilpotente et $\mathfrak{g}_1$ centrale dans $\mathfrak{g}_2$, alors $\mathfrak{g}_2$ est nilpotente.

d) Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ pour un espace vectoriel de dimension finie V. Enoncer une condition suffisante portant sur les endomorphismes $X \in \mathfrak{g}$ pour que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente (sans démonstration).
Solution : Si tous les $X \in \mathfrak{g}$ sont des endomorphismes nilpotents, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente (Conséquence du premier théorème d'Engel; la réciproque est fausse).

e) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. (1) Exhiber une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$; (2) décrire le système de racines associé ; (3) exhiber une base du système de racines ; (4) décrire le diagramme de Dynkin associé ; (5) décrire le groupe de Weyl.
Solution : (1) Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est formée par les matrices diagonales $n \times n$ de trace 0. (2) Soit $\varepsilon_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ la forme linéaire qui envoie une matrice diagonale sur son i-ème coefficient diagonal. Pour des entiers $1 \leq i, j \leq n$, posons $\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Alors le systèmes de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est formée des vecteurs

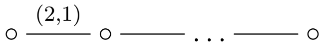
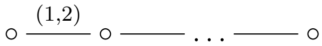
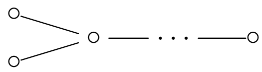
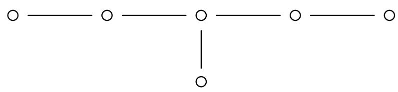
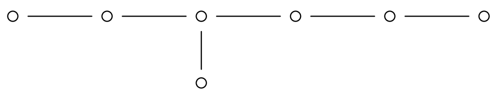
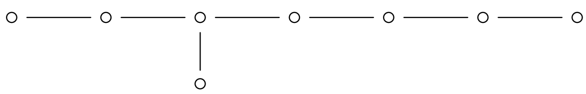
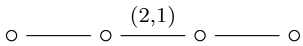
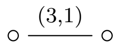
Nom	Diagramme	n	h
A_n		≥ 1	$n+1$
B_n		≥ 2	$2n$
C_n		≥ 3	$2n$
D_n		≥ 4	$2n-2$
E_6		6	12
E_7		7	18
E_8		8	30
F_4		4	12
G_2		2	6

Figure 1: Diagrammes de Dynkin

α_{ij}, où $i \neq j$. (3) Une base de R est formé des vecteurs $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1,n}$. (4) Le diagramme de Dynkin est une chaîne de $n-1$ sommets chacun lié au suivant par une arête. (5) Le groupe de Weyl s'identifie au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agissant sur $\mathfrak{h}$ en permutant les ε_i.

f) Enoncer la classification des systèmes de racines réduits irréductibles. Quel est le lien avec les algèbres de Lie simples complexes ?

Solution : Les systèmes de racines réduits irréductibles sont classifiés par leurs diagrammes de Dynkin. Ces diagrammes sont listés dans la figure (1) où l'on indique en plus le nombre de Coxeter h. L'application qui, à une algèbre simple complexe, associé son système de racines induit une bijection entre les classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie simples complexes et le classes d'isomorphisme de diagrammes de Dynkin.

2) Soient V un espace vectoriel et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On note TV l'algèbre tensorielle sur V. On notera uv le produit de deux éléments de TV. Soit A une algèbre associative unifère. On note A_{Lie} l'algèbre de Lie dont l'espace vectoriel sous-jacent est A et dont le crochet est défini par $[a,b] = ab - ba$.

a) Rappeler la propriété universelle de l'application canonique $\mathrm{can} : V \to TV$.

Solution : Pour toute application linéaire $f : V \to A$, il existe un unique morphisme d'algèbres unifères $\psi : TV \to A$ tel que $\psi \circ \mathrm{can} = f$.

b) *L'algèbre enveloppante* $U(\mathfrak{g})$ est définie comme le quotient de $T\mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $XY - YX - [X,Y]$, où $X, Y \in \mathfrak{g}$. On note ι la composition $\mathfrak{g} \to T\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ de la projection π avec l'application canonique can. Montrer que pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to A_{Lie}$ il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to A$ tel que $\varphi \circ \iota = f$.

Solution : L'application $f : \mathfrak{g} \to A_{Lie}$ est en particulier une application linéaire de $\mathfrak{g}$ vers A. Il existe donc un unique morphisme d'algèbres $\psi : T\mathfrak{g} \to A$ tel que $\psi \circ \mathrm{can} = f$. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\psi(XY - YX - [X,Y]) = f(X)f(Y) - f(Y)f(X) - f([X,Y]) = 0$$

car f est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to A_{Lie}$. Le morphisme $\psi : T\mathfrak{g} \to A$ s'annule donc sur l'idéal engendré par les éléments $XY - YX - [X,Y]$ et induit un unique morphisme d'algèbres $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to A$ tel que $\varphi \circ \pi = \psi$. Il s'ensuit que $\varphi \circ \iota = f$ et que φ est unique avec cette propriété.

c) Montrer que pour toute représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, il existe une unique représentation $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(V)$ telle que $\varphi \circ \iota = \rho$.

Solution : Par définition, on a $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}_k(V)_{Lie}$ et ρ est un morphisme d'algèbres de Lie. L'affirmation est alors une conséquence immédiate du point précédent.

d) Montrer que pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $F : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ tel que $F \circ \iota = \iota \circ f$.

Solution : La composition $\iota \circ f : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{h})$ est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{h})_{Lie}$. Il existe donc un unique morphisme d'algèbres $F : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ tel que $F \circ \iota = \iota \circ f$.

e) Montrer que pour toute application linéaire $D : V \to V$, il existe une unique dérivation $\tilde{D} : TV \to TV$ dont la restriction à V est D.

Solution : Soient $v_1, \ldots, v_n$ dans V. On définit

$$\tilde{D}(v_1 \ldots v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \ldots v_{i-1}(Dv_i)v_{i+1} \ldots v_n.$$

Comme $\tilde{D}$ doit vérifier la règle de Leibniz et étendre D, c'est la seule possibilité. Il est immédiat que $\tilde{D}$ ainsi défini est une dérivation qui étend D.

f) Montrer que pour toute dérivation $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, il existe une unique dérivation $\overline{D} : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ telle que $\overline{D} \circ \iota = \iota \circ D$. Comment décrire $\overline{D}$ si $D = \mathrm{ad}(X)$ pour un $X \in \mathfrak{g}$?

Solution : Par le point précédent, il existe une unique dérivation $\tilde{D} : T\mathfrak{g} \to T\mathfrak{g}$ qui étend D. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{D}(XY - YX - [X,Y]) &= D(X)Y + XD(Y) - D(Y)X - YD(X) - [DX,Y] - [Y,DX] \\ &= (D(X)Y - YD(X) - [DX,Y]) + (XD(Y) - D(Y)X - [X,DY]).\end{aligned}$$

Donc on a $\tilde{D}(g_{X,Y}) \in I$ pour chacun des générateurs

$$g_{X,Y} = XY - YX - [X,Y]$$

de l'idéal I. Comme $\tilde{D}$ est un dérivation, il s'ensuit que $\tilde{D}(I) \subseteq I$. Donc $\tilde{D}$ induit une unique application linéaire $\overline{D} : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ et il est clair que $\overline{D}$ est une dérivation, vérifie $\overline{D} \circ \iota = \iota \circ D$ et est unique avec ces propriétés. Si $D = \mathrm{ad}(X)$, on a $\overline{D} = [X, ?]$ par l'unicité.

g) Soit $n \geq 0$. On note $U_n\mathfrak{g}$ l'image dans $U(\mathfrak{g})$ du sous-espace

$$T_n\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n}$$

de $T\mathfrak{g}$. Soit D une dérivation de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\overline{D}(U_n(\mathfrak{g})) \subseteq U_n(\mathfrak{g})$. Montrer que si D est nilpotente, alors $\overline{D}$ induit un endomorphisme nilpotent de $U_n(\mathfrak{g})$.

Solution : La formule explicite pour $\tilde{D}$ montre que $\tilde{D}$ envoie $T_n\mathfrak{g}$ dans $T_n\mathfrak{g}$. Comme $\overline{D}$ est induite par $\tilde{D}$, il s'ensuit que $\overline{D}$ envoie $U_n(\mathfrak{g})$ dans $U_n(\mathfrak{g})$. Soient $X_1, \dots X_k$ dans $\mathfrak{g}$. Par la règle de Leibniz, pour $N \geq 1$, on a

$$\overline{D}^N(X_1 \dots X_k) = \sum \binom{n}{n_1, \dots, n_k} D^{n_1}(X_1) \dots D^{n_k}(X_k)\,,$$

où la somme porte sur toutes les décompositions

$$N = n_1 + \cdots + n_k$$

de N en somme d'entiers naturels. Il s'ensuit que si $D^m = 0$, alors $\overline{D}^{nm}$ s'annule sur $U_n(\mathfrak{g})$.

h) Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-algèbres de Lie telles que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ comme espace vectoriel. Notons $\alpha : U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{g})$ et $\beta : U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ les prolongements des inclusions (voir d). Soit $\varphi : U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(a \otimes b) = \alpha(a)\beta(b)$$

pour $a \in U(\mathfrak{a})$ et $b \in U(\mathfrak{b})$. Montrer que φ est surjective. Indication : on pourra montrer par récurrence sur n que $U_n(\mathfrak{g})$ est contenu dans l'image de φ.

Solution : Clairement $U_0(\mathfrak{g})$ est contenu dans l'image de φ. Supposons que $n > 0$ et que nous avons montré que $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ est dans l'image de φ. Clairement $U_n(\mathfrak{g})$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par les Xu, où $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Nous avons $X = A + B$ pour un $A \in \mathfrak{a}$ et un $B \in \mathfrak{b}$. Nous avons

$$Xu = (A + B)u = Au + [B, u] + uB.$$

Par l'hypothèse de récurrence, u est dans l'image de φ. Donc Au et uB le sont aussi. Comme $[B, ?] : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ est une dérivation qui étend $\mathrm{ad}(B) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, par le point g), l'application $[B, ?]$ envoie $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ dans $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ et donc $[B, u]$ appartient à $U_{n-1}(\mathfrak{g})$, qui est dans l'image de φ par récurrence.

3) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. On se propose de montrer que $\mathfrak{g}$ admet une représentation fidèle de dimension finie si $\mathfrak{g}$ est semi-simple ou nilpotente.

a) Supposons que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Montrer que $\mathfrak{g}$ admet une représentation fidèle de dimension finie.

Solution : Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple son centre s'annule et sa représentation adjointe est fidèle.

b) Supposons que $\rho_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_0)$ est une représentation de dimension finie dont la restriction au centre de $\mathfrak{g}$ est fidèle. Montrer qu'il existe une représentation de dimension finie ρ_1 de $\mathfrak{g}$ telle que la somme de ρ_0 et ρ_1 est fidèle.

Solution : Le noyau de la somme de ρ_0 et ρ_1 est l'intersection des noyaux. Donc si on prend pour ρ_1 la représentation adjointe, dont le noyau est le centre, alors le noyau de la somme est bien nul.

c) Supposons que $\mathfrak{g}$ est abélienne. Soit $V = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{C}$, on pose

$$\rho(X)(Y, t) = (tX, 0).$$

Montrer que $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation fidèle.

Solution : Clairement, pour X_1, X_2 dans $\mathfrak{g}$, nous avons $\rho(X_1)\rho(X_2) = 0$ ce qui implique que ρ est bien une représentation de l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}$. Comme nous avons $\rho(X)(0, 1) = (X, 0)$, cette représentation est bien fidèle.

d) A partir de maintenant, on suppose $\mathfrak{g}$ nilpotente. On se propose de construire, par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, une représentation fidèle de dimension finie ρ de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho(\mathfrak{g})^k = 0$ pour un $k > 0$ (cette dernière condition sera utilisée pour montrer l'hérédité). D'après c), on peut supposer $\mathfrak{g}$ non abélienne. Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{g}$ contient un idéal $\mathfrak{a}$ de codimension 1 contenant $\mathfrak{z}$. Indication : On pourra partir d'un sous-espace de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$, où $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

Solution : Comme $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne, $\mathfrak{g}_1$ est non nul. Comme $\mathfrak{g}_1$ est encore nilpotente, son abélianisée $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ est non nulle. Il existe donc bien un sous-espace V de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ et comme cette algèbre de Lie est abélienne, V est en fait un idéal de codimension 1. Donc l'image réciproque de V dans $\mathfrak{g}_1$ est aussi un idéal de codimension 1 et l'image réciproque de cet idéal dans $\mathfrak{g}$ est un idéal de codimension 1 contenant $\mathfrak{z}$.

e) Montrer que $\mathfrak{g}$ admet une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$.

Solution : Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{h}$ est de dimension 1, c'est bien une sous-algèbre.

f) Par l'hypothèse de récurrence, il existe une représentation fidèle de dimension finie ρ_0 de $\mathfrak{a}$ telle que $\rho_0(\mathfrak{a})^{k_0} = 0$ pour un $k_0 > 0$. Pour $H \in \mathfrak{h}$, notons $D_H : U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})$ la dérivation telle que $D_H \circ \iota = \iota \circ \mathrm{ad}(H)$ (voir 2 f). Pour $u \in U(\mathfrak{a})$, $H \in \mathfrak{h}$ et $A \in \mathfrak{a}$, posons

$$(H + A)u = D_H(u) + Au.$$

Montrer qu'on définit ainsi une action de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ sur $U(\mathfrak{a})$.

Solution : Soient $H, H' \in \mathfrak{h}$ et $A, A' \in \mathfrak{a}$. Notons aussi A la multiplication à gauche par A. Soit $u \in U(\mathfrak{a})$. Nous avons

$$\begin{aligned}(H' + A').(H + A).u &- (H + A).(H' + A').u \\ &= [D_{H'}, D_H](u) + [D'_H, A](u) + [A', D_H](u) + [A', A](u).\end{aligned}$$

On a $[D_{H'}, D_H] = D_{[H',H]}$ par l'unicité de la dérivation de $U(\mathfrak{a})$ qui étend une dérivation $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$. On calcule que

$$[D'_H, A](u) = D_{H'}(Au) - AD_{H'}(u) = D_{H'}(A)u + AD_{H'}(u) - AD_{H'}(u) = [H', A]u.$$

De même, on a $[A', D_H](u) = [A', H]u$. On a donc bien défini une action de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ sur $U(\mathfrak{a})$.

g) Soit I l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{a})$ engendré par $\pi(\mathfrak{a})^{k_0}$. Montrer que $U(\mathfrak{a})/I$ est de dimension finie et que l'action de $\mathfrak{h}$ sur $U(\mathfrak{a})$ envoie I dans I. On note π la projection canonique $U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})/I$.

Solution : Clairement $U(\mathfrak{a})/I$ est l'image de $U_{k_0-1}(\mathfrak{a})$ qui est de dimension finie puisque $T_{k_0-1}\mathfrak{a}$ est de dimension finie. Comme l'action de $\mathfrak{h}$ sur $U(\mathfrak{a})$ envoie l'image de $\mathfrak{a}$ dans elle-même et se fait par dérivations, elle envoie l'espace générateur $\pi(\mathfrak{a})^{k_0}$ dans lui-même et I dans I.

h) Déduire que $U(\mathfrak{a})/I$ admet une structure de $\mathfrak{g}$-module telle que $U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})/I$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules. Notons ρ_1 la représentation associée. Montrer que la restriction de ρ_1 à $\mathfrak{a}$ est fidèle.

Solution : Comme l'action de $\mathfrak{a}$ par multiplication à gauche et l'action de $\mathfrak{h}$ par dérivations laissent stable I, il en est de même de l'action combinée et le quotient $U(\mathfrak{a})/I$ hérite bien d'une structure de $\mathfrak{g}$-module. Comme $\rho_0(\mathfrak{a})^{k_0}$ s'annule, le morphisme $\varphi_0 : U(\mathfrak{a}) \to \mathrm{End}_k(V_0)$ associé à ρ_0 se factorise

$$U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})/I \to \mathrm{End}_k(V_0).$$

Comme ρ_0 est injectif, la restriction de ρ_1 à $\mathfrak{a}$ est fidèle.

i) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\rho_1(\mathfrak{h})^k = 0$. Indication : on pourra se servir de l'exercice 2 g).

Solution : Comme $\mathfrak{g}$ *est nilpotente, pour* $H \in \mathfrak{h}$*, l'action de* $\mathrm{ad}(H)$ *dans* $\mathfrak{a}$ *est nilpotente. D'après l'exercice 2 g), la dérivation* D_H *agit de façon nilpotente dans* $U(\mathfrak{a})/I$*.*

j) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\rho_1(\mathfrak{g})^k = 0$. Indication : on pourra se servir de l'exercice 2 h).

Solution : Soient $B_1, \ldots, B_n$ *dans* $\mathfrak{g}$*. D'après l'exercice 2 h), il suffit de trouver* $k > 0$ *tel que*

$$(H_1 \ldots H_{k_1} A_1 \ldots A_{k_2}).B_1 \ldots B_n$$

s'annule dans $U(\mathfrak{a})/I$ *pour* $k_1 + k_2 = k$ *pour tous* H_i *dans* $\mathfrak{h}$ *et* A_i *dans* $\mathfrak{a}$*. Soit* $N > 0$ *tel que* $C^N(\mathfrak{g}) = 0$*. On pose* $k = (N+1)k_0$*. Alors si* $k_1 + k_2 = k$*, l'une des conditions* $k_2 \geq k_0$ *ou* $k_1 \geq Nk_0$ *est satisfaite de façon qu'on a bien l'annulation dans* $U(\mathfrak{a})/I$*.*

k) A partir de ρ_1, construire une représentation fidèle ρ de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho(\mathfrak{g})^k = 0$ pour un $k > 0$.

Solution : Soit ρ_2 *la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$*. Alors son noyau est* $\mathfrak{z}$ *et comme* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente, il existe* $k > 0$ *tel que* $\rho_2(\mathfrak{g})^k = 0$*. Maintenant, il suffit de prendre pour* ρ *la somme directe de* ρ_1 *et* ρ_2*.*