Université Paris Diderot – Paris 7 17/12/2018
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et J.-Y. Ducloux

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes II

Examen

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.*

   a) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. (1) Exhiber une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$; (2) décrire le système de racines associé ; (3) exhiber une base du système de racines ; (4) décrire le diagramme de Dynkin associé ; (5) décrire le groupe de Weyl.
   b) Enoncer la classification des systèmes de racines réduits irréductibles. Quel est le lien avec les algèbres de Lie simples complexes ?
   c) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $U\mathfrak{g}$ son algèbre enveloppante. Enoncer le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt pour $U\mathfrak{g}$.
   d) Soit V un espace vectoriel. Rappeler la définition de l'algèbre de Lie libre sur V à l'aide d'une propriété universelle.
   e) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base S du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Rappeler la définition du module de Verma $\Delta(\lambda)$ associé à une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ et la définition du module simple $L(\lambda)$.
   f) Quel est le caractère de $\Delta(\lambda)$?
   g) A quelle condition le module $L(\lambda)$ est-il de dimension finie ? Quel est alors son caractère ? Sa dimension ?

2) Soit A un anneau noethérien à gauche (toute suite croissante d'idéaux à gauche devient stationnaire). Soit x un élément de A tel que la multiplication $a \mapsto ax$ est une application injective de A dans A (on dit que x est un non diviseur de 0 à droite). Soit I un idéal à gauche non nul de A. On se propose de montrer que $I \cap Ax$ est non nul.

   a) Supposons que $I \cap Ax$ est nul. Montrer que la somme
   $$I + Ix + Ix^2 + \ldots + Ix^n + \ldots$$
   est directe.
   b) Déduire du point précédent que si $I \cap Ax$ est nul, alors $I = 0$.
   c) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Montrer que l'intersection de deux idéaux à gauche non nuls I et J de $U\mathfrak{g}$ est non nulle.

3) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base S du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ de racines simples. On note $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Soit λ une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$.

   a) Soit μ une deuxième forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. Montrer que tout morphisme non nul $f : \Delta(\mu) \to \Delta(\lambda)$ est injectif.
   b) Montrer que deux sous-modules L et M non nuls de $\Delta(\lambda)$ ont une intersection non nulle. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.
   c) Montrer que $\Delta(\lambda)$ contient un plus petit sous-module non nul V et que V est simple. Indication : on pourra utiliser un résultat du cours.
   d) Montrer que V est isomorphe à $\Delta(\mu)$ pour une forme linéaire μ sur $\mathfrak{h}$. Indication : on pourra utiliser la question a).
   e) Montrer que pour λ donné, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour μ.

4) On garde les notations de l'exercice précédent. Soient λ et μ deux formes linéaires sur $\mathfrak{h}$. On se propose de montrer que l'espace des morphismes de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$ est de dimension au plus un.

   a) Montrer que l'espace des endomorphismes de $\Delta(\lambda)$ est de dimension 1.
   b) Soient f_1 et f_2 deux morphismes non nuls de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$ qui ont même image. Montrer qu'il existe un automorphisme g de $\Delta(\lambda)$ tel que $f_2 = f_1 \circ g$ et déduire que f_1 et f_2 sont proportionnels. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.
   c) Supposons que $\Delta(\lambda)$ est simple. Soient f_1 et f_2 deux morphismes non nuls de $\Delta(\lambda)$ dans $\Delta(\mu)$. Montrer que f_1 et f_2 sont proportionnels. Indication : on pourra se servir de l'exercice précédent.
   d) Par le point d) de l'exercice précédent, il existe un module simple $\Delta(\nu)$ et un morphisme injectif $g : \Delta(\nu) \to \Delta(\lambda)$. Montrer que g induit une injection

$$\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \to \mathrm{Hom}(\Delta(\nu), \Delta(\mu))$$

   et conclure.

5) On garde les notations de l'exercice 3). Soit d un entier supérieur ou égal à 1.

   a) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension d.
   b) On note p la moitié de la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Construire un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension d^p.