Université Paris Diderot – Paris 7 17/12/2019
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et J.-Y. Ducloux

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes II

Un corrigé de l'examen du 17/12/2019

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.* Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On fixe une base $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ du système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ de racines simples. On note $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

   a) Rappeler la description de $\mathfrak{g}$ par des générateurs H_i, X_i, Y_i, $1 \leq i \leq n$, et les relations dues à Weyl et Serre.
   b) Rappeler la définition du module de Verma $\Delta(\lambda)$ associé à une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ et la définition du module simple $L(\lambda)$.
   c) Quel est le caractère de $\Delta(\lambda)$?
   d) A quelle condition le module $L(\lambda)$ est-il de dimension finie ? Quel est alors son caractère ? Sa dimension ?
   e) Rappeler la définition de la catégorie $\mathcal{O}$.

2) On garde les notations de la question 1).

   a) Soient V un $\mathfrak{g}$-module qui a un poids maximal $\mu \in \mathfrak{h}^*$ et v un vecteur non nul de poids μ. Montrer que v est primitif.
   b) Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie engendré par un vecteur primitf. Montrer que V est simple.

3) On garde les notations de la question 1). Par λ et μ on désigne des éléments de $\mathfrak{h}^*$.

   a) Montrer que la projection $p : \Delta(\lambda) \to L(\lambda)$ se factorise de façon unique à travers tout morphisme non nul surjectif de $\mathfrak{g}$-modules $q : \Delta(\lambda) \to M$.
   b) Supposons que $\mu < \lambda$. Soient M un module $\mathfrak{h}$-diagonalisable et $p : M \to \Delta(\lambda)$ un morphisme surjectif dont le noyau L est un module de plus haut poids μ. Montrer qu'il existe un morphisme $s : \Delta(\lambda) \to M$ tel que $p \circ s = \mathrm{Id}_{\Delta(\lambda)}$.

4) On garde les notations de la question 1). Par λ et μ on désigne des éléments de $\mathfrak{h}^*$. Notons $\mathfrak{g}^{op}$ l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni du crochet $[X, Y]^{op} = [Y, X]$. Un *anti-automorphisme* de $\mathfrak{g}$ est un isomorphisme $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{op}$.

   a) Montrer que $\mathfrak{g}$ admet un unique anti-automorphism τ tel que $\tau(H) = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, $\tau(X_i) = Y_i$ et $\tau(Y_i) = X_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Décrire explicitement τ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

b) Soit M un $\mathfrak{g}$-module. On définit $M^{*\tau}$ comme l'espace dual $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$ muni de l'action de $\mathfrak{g}$ définie par

$$(Xf)(m) = f(\tau(X)m)$$

pour $X \in \mathfrak{g}$, $f \in M^*$ et $m \in M$. Montrer que $M^{*\tau}$ est bien un $\mathfrak{g}$-module à gauche.

c) Soit M un $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{h}$-diagonalisable. Soit $M^\vee$ le sous-espace de M^* formé de toutes les formes f sur M telles que $f(M^\lambda) = 0$ pour tous les $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ sauf un nombre fini. Montrer que $M^\vee$ est un $\mathfrak{g}$-sous-module de $M^{*\tau}$ et qu'il est $\mathfrak{h}$-diagonalisable.

d) Montrer que si M est $\mathfrak{h}$-diagonalisable et que ses poids sont tous de multiplicité finie, alors c'est aussi le cas pour $M^\vee$ et le caractère $\mathrm{ch}(M^\vee)$ est égal à $\mathrm{ch}(M)$. Montrer que dans cas, le morphisme canonique $M \to (M^\vee)^\vee$ est inversible.

e) Montrer que pour toute suite exacte

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

de $\mathfrak{g}$-modules $\mathfrak{h}$-diagonalisables, la suite induite

$$0 \to N^\vee \to M^\vee \to L^\vee \to 0$$

est exacte.

f) Montrer que le module $L(\lambda)^\vee$ est simple et isomorphe à $L(\lambda)$.

g) Soit M un objet de la catégorie $\mathcal{O}$. Montrer que $M^\vee$ appartient encore à $\mathcal{O}$ et qu'on a

$$[M : L(\lambda)] = [M^\vee : L(\lambda)].$$

h) Montrer que $\Delta(\lambda)^\vee$ admet un unique sous-module simple et que ce sous-module est isomorphe à $L(\lambda)$.

i) Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Montrer que tout sous-module non nul M de $\Delta(\lambda)^\vee$ contient le sous-module simple $L(\lambda)$. Montrer que les autres simples $L(\mu)$ apparaissant dans une suite de Jordan–Hölder de $\Delta(\lambda)^\vee$ vérifient $\mu < \lambda$.

j) Montrer que pour tout morphisme non nul $f : \Delta(\mu) \to \Delta(\lambda)^\vee$, l'image M de f contient $L(\lambda)$. Déduire que $\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda), \Delta(\lambda)^\vee)$ est de dimension 1 et que $\mathrm{Hom}(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)^\vee) = 0$ pour $\mu \neq \lambda$.

k) Montrer que toute suite exacte de $\mathcal{O}$

$$0 \to \Delta(\lambda)^\vee \to M \xrightarrow{p} \Delta(\mu) \to 0$$

se scinde. Indication : on pourra distinguer des cas suivant que μ est maximal ou non parmi les poids de M et utiliser la dualité $?^\vee$ dans ce dernier cas.

l) Soit une suite exacte de $\mathcal{O}$

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \to \Delta(\mu) \to 0.$$

Montrer que pour tout morphisme $f : N \to \Delta(\lambda)^\vee$, il existe un morphisme $g : M \to \Delta(\lambda)^\vee$ tel que $g \circ i = f$.

m) Supposons que $M \in \mathcal{O}$ admet une filtration standard. Montrer qu'on a

$$[M : \Delta(\lambda)]_\Delta = \dim \mathrm{Hom}(M, \Delta(\lambda)^\vee).$$

Indication : on pourra procéder par récurrence sur la longueur d'une filtration standard de M et utiliser les points j) et l).

n) Montrer que l'on a la réciprocité de Bernstein–Gelfand–Gelfand

$$[P(\lambda) : \Delta(\mu)]_\Delta = [\Delta(\mu) : L(\lambda)].$$

Indication : on pourra montrer que les deux côtés valent $\dim \mathrm{Hom}(P(\lambda), \Delta(\mu)^\vee)$.