Université Paris Diderot – Paris 7 30/10/2019
U.F.R. de Mathématiques B. Keller et J.-Y. Ducloux

M2 Mathématiques Fondamentales
Algèbres de Lie semi-simples complexes I

Examen

Avertissement : Les documents, calculettes et portables sont interdits. Pour avoir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$.

1) *Questions de cours.*

   a) Définir la notion d'algèbre de Lie.
   b) Définir la notion de $\mathfrak{g}$-module pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
   c) Définir la notion d'algèbre de Lie nilpotente. Par quelles opérations la classe des algèbres de Lie nilpotentes est-elle stable ?
   d) Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ pour un espace vectoriel de dimension finie V. Enoncer une condition suffisante portant sur les endomorphismes $X \in \mathfrak{g}$ pour que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente (sans démonstration).
   e) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. (1) Exhiber une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$; (2) décrire le système de racines associé ; (3) exhiber une base du système de racines ; (4) décrire le diagramme de Dynkin associé ; (5) décrire le groupe de Weyl.
   f) Enoncer la classification des systèmes de racines réduits irréductibles. Quel est le lien avec les algèbres de Lie simples complexes ?

2) Soient V un espace vectoriel et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On note TV l'algèbre tensorielle sur V. On notera uv le produit de deux éléments de TV. Soit A une algèbre associative unifère. On note A_{Lie} l'algèbre de Lie dont l'espace vectoriel sous-jacent est A et dont le crochet est défini par $[a, b] = ab - ba$.

   a) Rappeler la propriété universelle de l'application canonique can : $V \to TV$.
   b) *L'algèbre enveloppante* $U(\mathfrak{g})$ est définie comme le quotient de $T\mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $XY - YX - [X, Y]$, où $X, Y \in \mathfrak{g}$. On note ι la composition $\mathfrak{g} \to T\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ de la projection π avec l'application canonique can. Montrer que pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to A_{Lie}$ il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to A$ tel que $\varphi \circ \iota = f$.
   c) Montrer que pour toute représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, il existe une unique représentation $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(V)$ telle que $\varphi \circ \iota = \rho$.
   d) Montrer que pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $F : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ tel que $F \circ \iota = \iota \circ f$.
   e) Montrer que pour toute application linéaire $D : V \to V$, il existe une unique dérivation $\tilde{D} : TV \to TV$ dont la restriction à V est D.
   f) Montrer que pour toute dérivation $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, il existe une unique dérivation $\overline{D} : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ telle que $\overline{D} \circ \iota = \iota \circ D$. Comment décrire $\overline{D}$ si $D = \mathrm{ad}(X)$ pour un $X \in \mathfrak{g}$?

g) Soit $n \geq 0$. On note $U_n\mathfrak{g}$ l'image dans $U(\mathfrak{g})$ du sous-espace

$$T_n\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n}$$

de $T\mathfrak{g}$. Soit D une dérivation de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\overline{D}(U_n(\mathfrak{g})) \subseteq U_n(\mathfrak{g})$. Montrer que si D est nilpotente, alors $\overline{D}$ induit un endomorphisme nilpotent de $U_n(\mathfrak{g})$.

h) Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-algèbres de Lie telles que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ comme espace vectoriel. Notons $\alpha : U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{g})$ et $\beta : U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ les prolongements des inclusions (voir d). Soit $\varphi : U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(a \otimes b) = \alpha(a)\beta(b)$$

pour $a \in U(\mathfrak{a})$ et $b \in U(\mathfrak{b})$. Montrer que φ est surjective. Indication : on pourra montrer par récurrence sur n que $U_n(\mathfrak{g})$ est contenu dans l'image de φ.

3) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. On se propose de montrer que $\mathfrak{g}$ admet une représentation fidèle de dimension finie si $\mathfrak{g}$ est semi-simple ou nilpotente.

a) Supposons que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Montrer que $\mathfrak{g}$ admet une représentation fidèle de dimension finie.

b) Supposons que $\rho_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_0)$ est une représentation de dimension finie dont la restriction au centre de $\mathfrak{g}$ est fidèle. Montrer qu'il existe une représentation de dimension finie ρ_1 de $\mathfrak{g}$ telle que la somme de ρ_0 et ρ_1 est fidèle.

c) Supposons que $\mathfrak{g}$ est abélienne. Soit $V = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{C}$, on pose

$$\rho(X)(Y,t) = (tX, 0).$$

Montrer que $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation fidèle.

d) A partir de maintenant, on suppose $\mathfrak{g}$ nilpotente. On se propose de construire, par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, une représentation fidèle de dimension finie ρ de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho(\mathfrak{g})^k = 0$ pour un $k > 0$ (cette dernière condition sera utilisée pour montrer l'hérédité). D'après c), on peut supposer $\mathfrak{g}$ non abélienne. Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{g}$ contient un idéal $\mathfrak{a}$ de codimension 1 contenant $\mathfrak{z}$. Indication : On pourra partir d'un sous-espace de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$, où $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

e) Montrer que $\mathfrak{g}$ admet une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$.

f) Par l'hypothèse de récurrence, il existe une représentation fidèle de dimension finie ρ_0 de $\mathfrak{a}$ telle que $\rho_0(\mathfrak{a})^{k_0} = 0$ pour un $k_0 > 0$. Pour $H \in \mathfrak{h}$, notons $D_H : U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})$ la dérivation telle que $D_H \circ \iota = \iota \circ \mathrm{ad}(H)$ (voir 2 f). Pour $u \in U(\mathfrak{a})$, $H \in \mathfrak{h}$ et $A \in \mathfrak{a}$, posons

$$(H + A)u = D_H(u) + Au.$$

Montrer qu'on définit ainsi une action de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ sur $U(\mathfrak{a})$.

g) Soit I l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{a})$ engendré par $\pi(\mathfrak{a})^{k_0}$. Montrer que $U(\mathfrak{a})/I$ est de dimension finie et que l'action de $\mathfrak{h}$ sur $U(\mathfrak{a})$ envoie I dans I. On note π la projection canonique $U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})/I$.

h) Déduire que $U(\mathfrak{a})/I$ admet une structure de $\mathfrak{g}$-module telle que $U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})/I$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules. Notons ρ_1 la représentation associée. Montrer que la restriction de ρ_1 à $\mathfrak{a}$ est fidèle.

i) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\rho_1(\mathfrak{h})^k = 0$. Indication : on pourra se servir de l'exercice 2 g).

j) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\rho_1(\mathfrak{g})^k = 0$. Indication : on pourra se servir de l'exercice 2 h).

k) A partir de ρ_1, construire une représentation fidèle ρ de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho(\mathfrak{g})^k = 0$ pour un $k > 0$.