Feuille d'exercices n°1

géométrie affine – barycentres

Certains des exercices qui suivent utilisent des notions de géométrie euclidienne, longueurs, aires, angles ...

Exercice 1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices dans la base canonique des applications linéaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ qui laissent invariant le point de coordonnées $(1,1)$. Montrer que c'est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En déterminer un point et une base de la direction.

Exercice 2. Montrer que $\mathcal{F} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)+1\right\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En déterminer un point et la direction.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3, muni d'un repère cartésien $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Soit les points :

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

les droites

$$d_1\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3-\lambda\\ y &=& 1+2\lambda\\ z &=& -1+\lambda\end{array}\right.,\lambda\in\mathbb{R},\quad d_2\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+3\mu\\ y &=& -2\mu\\ z &=& 3+5\mu\end{array}\right.,\mu\in\mathbb{R},$$

les plans

$$(P_1)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2\lambda+3\mu\\ y &=& -2+\lambda+\mu\\ z &=& 4-\lambda-2\mu\end{array}\right.,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad (P_2)\ 2x-y+3z-1=0,\quad (P_3)\ x+2z-4=0.$$

1. Donner une équation cartésienne de P_1.
2. Déterminer une représentation paramétrique de $P_2 \cap P_3$.
3. Donner une équation cartésienne du plan contenant A, B et C.
4. Déterminer l'intersection de d_1 et de P_2.
5. Donner une équation cartésienne du plan Q contenant d_1 et parallèle à d_2.
6. Déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
7. Déterminer l'intersection de P_2 avec la droite (AB).
8. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à P_2 et coupant d_1.
9. Donner une équation cartésienne du plan passant par C et contenant d_1.

Exercice 4. Soit E un K-espace affine et O un point de E. On rappele que n points $(A_1,\ldots,A_n)$ sont affinement liés si et seulement si les vecteurs $(\overrightarrow{A_1A_2},\ldots,\overrightarrow{A_1A_n})$ sont liés. Montrer que $(A_1,\ldots,A_n)$ sont liés si et seulement s'il existe n élément de $\mathbb{K}$, *non tous nuls* soient $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{OA_i} = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine muni d'un repère cartésien. Pour un point P, on note x_P, y_P ses coordonnées. Montrer que trois points P,Q,R sont alignés si et seulement si

$$\det\begin{pmatrix} x_P & y_P & 1\\ x_Q & y_Q & 1\\ x_R & y_R & 1\end{pmatrix} = 0.$$

1. **a.** En utilisant l'exercice précédent ;
   b. En identifiant $\mathcal{E}$ au sous-espace affine d'équation $z=1$ d'un espace de dimension 3.
2. On suppose que $\mathcal{E}$ est $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. On l'identifie au plan d'équation $z=1$ dans $\mathbb{R}^3$. L'unité d'aire est celle du carré de côtés $(0,1)$, $(1,0)$, l'unité de volume celle du parallépipède de côtés $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Montrer que la valeur absolue du déterminant égale deux fois l'aire du triangle (P,Q,R) :
   a. En utilisant que le déterminant de deux vecteurs dans le plan euclicidien $\mathbb{R}^2$ a pour valeur absolue l'aire du parallélogramme de côtés ces deux vecteurs ;
   b. En utilisant que le déterminant de trois vecteurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ a pour valeur absolue le volume du parallépipède de côtés ces trois vecteurs.

Exercice 6. Dans une espace affine réel un système S de points pondérés $(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ est tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$. Montrer que quelquesoit la partition de S en deux parties admettant chacune un barycentre, soient P et Q ceux-ci, le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ garde la même direction.

Dans tous les exercices qui suivent, on se place dans le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ muni d'un repère affine (A, B, C).

Exercice 7. Soit P, Q et R des points de $\mathcal{P}$ de coordonnées barycentriques respectives $(\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$, $(\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q)$ et $(\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$. Démontrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} = 0.$$

En déduire l'équation en coordonnées barycentriques d'une droite (QR) (avec $Q \neq R$).

Exercice 8. Soit (α, β, γ) un système de coordonnées barycentriques d'un point M de $\mathcal{P}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante liant α, β et γ pour que :

1. le point M appartienne à la droite (AB) ;

2. le point M appartienne à la médiane issue de B du triangle ABC ;

3. le point M soit sur la parallèle à la droite (BC) menée par le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 9. Les points L, M, N se trouvent sur les droites $(AB), (BC), (CA)$ respectivement et sont distincts de A, B, C.

Théorème de Menelaüs Montrer que L, M, N sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$.

Théorème de Ceva Montrer que les droites (LC), (MA) et (NB) sont concourantes ssi $\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$.

Exercice 10 (centre du cercle inscrit). Soient A', resp. B', resp. C' l'intersection de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue de A, resp. B, resp. C, et du côté opposé (BC), resp. (AC), resp. (BC). Déterminer les coordonnées barycentriques de A', B' et C' en fonction des longueurs AB, BC et AC. En déduire que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point I de coordonnées barycentriques $(\frac{BC}{p}, \frac{AC}{p}, \frac{AB}{p})$ avec $p = AB + BC + CA$.

Exercice 11 (Orthocentre). Soient A_1, resp. B_1, resp. C_1 l'intersection de la hauteur intérieure du triangle ABC issue de A, resp. B, resp. C, et du côté opposé (BC), resp. (AC), resp. (BC). Les angles du triangle en A, B et C sont nommés $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

1. On suppose que les 3 angles du triangle ABC sont aigus. Déterminer les coordonnées barycentriques de A_1, B_1 et C_1 en fonction des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. En déduire que les trois droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1) sont concourantes en un point H de coordonnées barycentriques $(\frac{\tan \widehat{A}}{s}, \frac{\tan \widehat{B}}{s}, \frac{\tan \widehat{C}}{s})$ avec $s = \tan \widehat{A} + \tan \widehat{B} + \tan \widehat{C}$.

2. Étudier le cas où l'un des angles, par exemple celui en A, n'est pas aigu.

Exercice 12. Soit M un point de $\mathcal{P}$. On désigne respectivement par P, Q et R les symétriques de M par rapport aux milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note G et K les centres de gravité respectifs des triangles ABC et PQR.

1. Montrer que $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MG}$.

2. Montrer que les milieux des segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ sont confondus en un point L. Montrer que L est le milieu de $[GK]$.

Exercice 13. Soit M un point tel que les droites (AM), (BM) et (CM) rencontrent respectivement (CB), (AC) et (AB) en A', B' et C'. On note K le symétrique de A' par rapport à (AB) parallèlement à (CC') et I le point d'intersection des droites (AB) et $(A'K)$. Soit (α, β, γ) les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A, B, C).

1. Exprimer les coordonnées barycentriques de A', B' et C' puis celles de I et de K.

2. Que peut-on dire de K, C' et B' ?

Exercice 14. Soit P, Q et R des points de $\mathcal{P}$ de coordonnées barycentriques respectives $(\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$, $(\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q)$ et $(\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$. On définit *l'aire algébrique* du triangle PQR (éventuellement dégénéré) par l'égalité

$$\mathrm{Aire}(PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que, pour deux triangles PQR et $P'Q'R'$, le rapport $\frac{\mathrm{Aire}(PQR)}{\mathrm{Aire}(P'Q'R')}$ ne dépend pas du choix du repère (A, B, C).

2. Montrer que les coordonnées d'un point S dans un repère (P, Q, R) sont données par les rapports

$$\frac{\mathrm{Aire}(SQR)}{\mathrm{Aire}(PQR)}, \quad \frac{\mathrm{Aire}(PSR)}{\mathrm{Aire}(PQR)}, \quad \frac{\mathrm{Aire}(PQS)}{\mathrm{Aire}(PQR)}.$$

3. Montrer que la valeur absolue de l'aire algébrique du triangle PQR représente bien l'aire ordinaire à un facteur multiplicatif près (voir exercice 5). Déduire de ceci et de la question précèdente que les coordonnées barycentriques du centre du triangle circonscrit au triangle ABC (intersection des médiatrices) sont des multiples de $(\sin(2\widehat{A}), \sin(2\widehat{B}), \sin(2\widehat{C}))$.