Université Paris 7 – Préparation CAPES 05-06
Géométrie 24 octobre 2005

Feuille d'exercices n°2

géométrie affine – applications affines

Exercice 1. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère cartésien (O, e_1, e_2), on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - y + 2 = 0$. Donner les expressions analytiques de la projection sur $\mathcal{D}$ et de la symétrie par rapport à $\mathcal{D}$ toutes deux de direction $e_1 + 3e_2$.

Exercice 2. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni du repère cartésien (O, e_1, e_2, e_3), on considère l'application affine f définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z + 2 \\ z' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z - 3 \end{array}\right.$$

On note $\vec{f}$ l'application linéaire associée à f.

1. Montrer que $\vec{f}$ est une projection (on précisera ses caractéristiques). Est-ce que f est une projection ?
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs des translations t vérifiant que l'application affine $t \circ f$ est une projection.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Trouver toutes les applications affines $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telles que pour tout $u \in E$, $t_u \circ f = f \circ t_u$.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble composé des translations et des symétries centrales d'un espace affine est un groupe pour la composition. Est-il commutatif ?

Exercice 5. On considère une translation t et une homothétie h d'un espace affine. Identifier les applications $f_1 = t \circ h \circ t$, $f_2 = h^{-1} \circ t \circ h$ et $f_3 = t \circ h \circ t^{-1}$.

Dans les exercices qui suivent le compas n'est utile que pour tracer une parallèle à une droite passant par un point donné. Les notions de cercle et de longueur (euclidiennes) ne sont pas utilisées.

Exercice 6. On se place dans le plan affine réel $\mathcal{P}$. Étant donnés trois points alignés (A, B, C) tels que $A \neq B$, il existe une unique homothétie h de $\mathcal{P}$, telle que h est de centre A et $h(B) = C$ (justifier). Montrer que l'on peut construire à la règle et au compas l'image par h d'un point quelconque M de $\mathcal{P}$, quand $M \notin (BC)$ puis quand $M \in (BC)$.

Exercice 7. Soient A, A', B, B' 4 points du plan affine réel $\mathcal{P}$ distincts deux à deux tels que $(AB) \parallel (A'B')$.

1. Montrer qu'il existe une unique homothétie-translation f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
2. On suppose que $\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$. Montrer que l'on peut construire à la règle et au compas le centre de l'homothétie vérifiant $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$ quand A, A', B, B' ne sont pas alignés, puis quand ils sont alignés.

Exercice 8. Soit h, respectivement h', une homothétie définie par 3 points alignés distincts 2 à 2 (A, B, C), respectivement (A', B', C'), comme à l'exercice 6. Montrer que si $h \circ h'$ est une homothétie on peut construire son centre à la règle et au compas.

Exercice 9 (Théorème de Pappus – cas “parallèle”**).** Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, D et D' deux droites distinctes, soient A, B, $C \in D$ et A', B', $C' \in D$ 6 points tous distincts entre eux, et distincts d'un éventuel point intersection de D et D'. On suppose que $(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$. Montrer, en utilisant une transformation affine adéquate, que $(CA') \parallel (C'A)$:

1. quand D et D' sont sécantes ;
2. quand D et D' sont parallèles.

Exercice 10 (Théorème de Desargues – cas “parallèle”**).** Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, soient A, B, C et A', B', C' 6 points tous distincts entre eux. On suppose que $(AB) \parallel (A'B')$ et $(BC) \parallel (B'C')$.

Montrer, en utilisant une transformation affine adéquate, que (AA'), (BB') et (CC') sont coucourantes ou parallèles si et seulement si $(CA) \parallel (C'A')$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G un sous-groupe fini du groupe affine de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{E}$ qui est fixe pour tous les éléments de G.

Exercice 12. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E. On suppose que $E = F \oplus D$ avec D une droite vectorielle. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, et soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à D. Pour tout réel k, on définit $a(M) = p(M) + k \cdot \overrightarrow{p(M)M}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que a est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, (on déterminera en particulier son application linéaire associée). Déterminer l'ensemble de ses points fixes. L'application a est appelée l'*affinité de direction D, d'hyperplan $\mathcal{F}$ et de rapport k*. Comment nomme-t-on également les affinités de rapport -1 ?
2. On suppose uniquement pour cette question que $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ le plan affine réel, et $\mathcal{F}$ est une droite affine, appelée dans ce cas *axe de l'affinité*. Soient A et A' deux points du plan tels que $A \notin \mathcal{F}$ et $(AA') \not\parallel \mathcal{F}$. Montrer qu'il existe une unique affinité a d'axe $\mathcal{F}$ telle que $a(A) = A'$, puis montrer que l'on peut construire l'image $M' = a(M)$ d'un point quelconque M de $\mathcal{P}$ à la règle et au compas ($\mathcal{F}$, A et A' étant donnés).
3. Montrer que la composée $a \circ t$ d'une affinité de rapport $k \neq 1$ de direction D, et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une affinité si et seulement si $\overrightarrow{u} \in D$.
4. Une *dilatation d'hyperplan F, de rapport k, de direction D ($F \oplus D = E$)*, est une application linéaire d telle que sa restriction à F $d_F = Id_F$, et sa restriction à D $d_D = k \cdot id_D$. On vérifie que si a est une affinité, l'application linéaire associée $\overrightarrow{a}$ est une dilatation. Montrer que si f est une application affine telle que $\overrightarrow{f}$ est une dilatation de direction D, d'hyperplan F, alors f et la composée $t \circ a$ d'une affinité a de rapport k de direction D et d'hyperplan $\mathcal{F}$ de direction F, et d'une translation t de vecteur $\overrightarrow{u} \in F$.
5. Montrer qu'une affinité est bijective si et seulement si son rapport est non nul. Déterminer dans ce cas la nature de son inverse.
6. Montrer que la composition de deux affinités de même directions et d'hyperplans parallèles est une affinité où une translation dont on précisera alors le vecteur. Décrire le groupe engendré par les affinités de même direction D et d'hyperplans tous de même direction F.

Exercice 13. Si E est un espace vectoriel de dimension 2, un endomorphisme de E est appelé *transvection vectorielle* s'il existe une base où sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$.

Soit maintenant $\mathcal{E}$ un plan affine de direction E et O un point de $\mathcal{E}$. On définit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ par $f(M) = O + u(M - O)$ où u est une transvection vectorielle.

1. Montrer que f est une bijection affine (appelée *transvection affine*). Déterminer l'ensemble de ses points fixes.
2. Soit A, B, C, A' tels que $f(B) = B$, $f(C) = C$ et $f(A) = A'$. Que peut-on dire de la droite (AA') ? Construire à la règle et au compas $f(M)$ quand M est un point quelconque du plan.
3. Montrer que la composée de deux symétries par rapport à une même droite est en général une transvection.

Exercice 14. Montrer que les transformations affines du plan affine réel $\mathcal{P}$ qui laissent une droite $\mathcal{D}$ invariante point par point sont exactement les affinités de rapport non nul et les transvections.

Exercice 15. Soit f une transformation affine quelconque du plan affine réel $\mathcal{P}$. Identifier l'application $f \circ g \circ f^{-1}$ quand g est successivement une translation, une homothétie, une projection, une symétrie, une affinité, une transvection.