Espaces Affines I —

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire donnée par $f(x,y,z) = x + 2y - 5z$.

   (a) Montrer que $\mathcal{E} = \{(x,y,z) |\ f(x,y,z) = 1\}$ est un espace affine et déterminer sa direction. Si $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(v) \neq 0$, vérifier que le vecteur $\frac{1}{f(v)}.v$ est dans $\mathcal{E}$.

   (b) Vérifier que les vecteurs:

   $$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   forment une base affine de $\mathcal{E}$.

   (c) Soit $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$. Trouver des réels m_1, m_2 et m_3 tel que v soit le barycentre du systèmes de points massiques $\{(u_1, m_1), (u_2, m_2), (u_3, m_3)\}$.

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $R \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel. Montrer que l'ensemble noté $\mathcal{E}/R$ des sous-espaces affines de direction R est naturellement un espace affine. Calculer la dimension de $\mathcal{E}/R$ en fonction de celle de $\mathcal{E}$ et R. Montrer que la fonction qui à un point $x \in \mathcal{E}$ associe l'unique sous-espace de direction R passant par x est une application affine: $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/R$.

3. Pour chacune des équations différentielles ci-dessous, montrer que l'ensemble des solutions est naturellement un espace affine et calculer sa dimension:

   (a) $xy' = y + 1$,

   (b) $y''' = x + 5$,

   (c) $y'' = y + x + 3$.

4. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine et $G \subset \vec{\mathcal{E}}$ tel que $\vec{\mathcal{E}} = G \oplus \vec{\mathcal{H}}$.

   (a) Pour $P \in \mathcal{E}$, montrer qu'il existe un unique $P_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ tel que $\overrightarrow{PP_{\mathcal{H}}} \in G$.

   (b) On définit une application $p^G_{\mathcal{H}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H}$ par la formule $pr^G_{\mathcal{H}}(P) = P_{\mathcal{H}}$. Montrer que $pr^G_{\mathcal{H}}$ est une application affine. Vérifier que $(pr^G_{\mathcal{H}}) \circ (pr^G_{\mathcal{H}}) = pr^G_{\mathcal{H}}$.

   (c) Réciproquement, soit $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine vérifiant $p \circ p = p$. Montrer qu'il existe un sous-espace affine $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel $N \subset \vec{\mathcal{E}}$ tel que $p = pr^N_{\mathcal{I}}$.

   (d) Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une transformation affine (donc inversible!). Calculer $f \circ pr^G_{\mathcal{H}} \circ f^{-1}$. (*Indication: utiliser la question précédente*)

5. (*Applications affines et points fixes*) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension fini sur un corps $\mathbb{K}$ et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Un point $P \in \mathcal{E}$ est un point fixe de f si $f(P) = P$. On appelle $\mathcal{F}_f \subset \mathcal{E}$ le sous-ensemble des points fixes de f.

   (a) Montrer que lorsqu'il est non vide, $\mathcal{F}_f$ est un sous-espace affine.

   (b) On fixe un point $P_0 \in \mathcal{E}$ et on note $P_1 = f(P_0)$. Montrer que P est un point fixe si et seulement si:

$$(\vec{f} - \mathrm{id})(\overrightarrow{P_0P}) = -\overrightarrow{P_0P_1}$$

   (c) En déduire que si 1 n'est pas une valeur propre de $\vec{f}$ alors f admet un unique point fixe.

   (d) On suppose que $\mathcal{F}_f$ est non vide. Exprimer sa direction en fonction de l'application linéaire $\vec{f}$.

   (e) **Définition:** *Soit λ un réel différent de 1. Une application linéaire $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une homothétie de rapport λ si $\vec{h} = \lambda.id$.*

      i. Montrer qu'une homothétie admet un unique point fixe appelé le centre.

      ii. Soient h_1 et h_2 deux homothéties de $\mathcal{E}$ de centre C_1 et C_2 et de rapport λ_1 et λ_2. On suppose que $\lambda_1.\lambda_2 \neq 1$. Montrer que $h = h_2 \circ h_1$ et encore une homothétie de rapport $\lambda_1.\lambda_2$. Montrer que le centre de h est le barycentre du système de points massiques $\{(C_1, \frac{1}{1-\lambda_2} - 1), (C_2, \frac{1}{1-\lambda_1})\}$