Espaces Affines II —

1. Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines sur $\mathbb{K}$. On note $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}_1, \vec{\mathcal{E}_2})$ est naturellement un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Calculer sa dimension en fonction de celles de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

   (b) Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est naturellement un espace affine sous $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}_1, \vec{\mathcal{E}_2})$.

   (c) Soient $f_1, \dots, f_r$ des applications affines de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ et $m_1, \dots, m_r$ des scalaires de sommes non nulle. On note f le barycentre dans $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ du système des points massiques: $\{(f_1, m_1), \dots, (f_r, m_r)\}$. Montrer que pour tout point $P \in \mathcal{E}$, le point $f(P)$ est le barycentre dans $\mathcal{E}_2$ du système de points massiques: $\{(f_1(P), m_1), \dots, (f_r(P), m_r)\}$.

   (d) On suppose que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$. Soient $h_1, \dots, h_r$ des homothéties de $\mathcal{E}$ de centres $C_1, \dots, C_r$ et de rapports $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Déterminer en fonction des C_i et λ_i le barycentre dans $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ du système de points massiques: $\{(h_1, m_1), \dots, (h_r, m_r)\}$.

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3. Soient D_1 et D_2 deux droites non-coplanaires dans $\mathcal{E}$. Déterminer les transformations affines f de $\mathcal{E}$ qui laissent globalement stables les droites D_1 et D_2. On pourra distinguer les cas suivants:

   - Les restrictions de f aux D_i sont des homothéties,
   - Les restrictions de f aux D_i sont des translations,
   - La restriction de f à D_1 est une homothétie et sa restriction à D_2 est une translation.

3. (*Les sections de l'application "flèche"*) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. On note $\mathbb{G}\mathrm{aff}(\mathcal{E})$ le groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$ et $\mathbb{G}l(\vec{\mathcal{E}})$ le groupe des automorphismes linéaires de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$.

   (a) Rappeler la suite exacte courte: $\vec{\mathcal{E}} \xrightarrow{t} \mathbb{G}\mathrm{aff}(\mathcal{E}) \xrightarrow{Fl} \mathbb{G}l(\vec{\mathcal{E}})$

   (b) **Définition:** *Une section de l'application flèche est un morphisme de groupes* $s : \mathbb{G}l(\vec{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ *tel que* $Fl \circ s = \mathrm{id}$. On se propose de déterminer toutes les sections de l'application flèche.

      i. Soit P un point de $\mathcal{E}$. On définit une application:

      $$s_P : \mathbb{G}l(\vec{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$$

      qui à un automorphisme u de $\vec{\mathcal{E}}$ associe la transformation affine $s_P(u)$ définie par $s_P(u)(Q) = P + u(\overrightarrow{PQ})$. Montrer que s_P est une section de l'application flèche.

ii. On fixe une section $s : \mathbb{G}l(\vec{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathbb{G}A\!f\!f(\mathcal{E})$ à l'application flèche. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0,1\}$. Montrer que $s(\lambda.\text{id})$ est une homothétie. On note P_λ son centre.

iii. Soit u un automorphisme de $\vec{\mathcal{E}}$. Montrer que $s(u)(P_\lambda) = P_\lambda$. (*Indication:* on peut considérer l'homothétie $s(u) \circ s(\lambda.\text{id}) \circ s(u)^{-1}$). En déduire que P_λ ne dépend pas de λ. On note le point ainsi obtenu P.

iv. Montrer que $s = s_P$.

4. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2. Étant donné deux triangles UVW et ABC, on pose:
$$\frac{\overline{UVW}}{\overline{ABC}} = |\det(\vec{f})|$$
avec f une application affine induisant une bijection de $\{A,B,C\}$ sur $\{U,V,W\}$.

(a) Montrer que $\frac{\overline{UVW}}{\overline{ABC}}$ ne dépend pas du choix de f.

(b) Montrer la formule:
$$\frac{\overline{XYZ}}{\overline{ABC}} = \frac{\overline{XYZ}}{\overline{UVW}} \times \frac{\overline{UVW}}{\overline{ABC}}$$

(c) On suppose que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ avec sa structure euclidienne. On cherche à montrer que:
$$\frac{\overline{UVW}}{\overline{ABC}} = \frac{\text{aire}(UVW)}{\text{aire}(ABC)}$$

i. On note Δ le triangle de $\mathbb{R}^2$ ayant pour sommets: $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Montrer qu'il suffit d'établir la formule:
$$\frac{\overline{ABC}}{\overline{\Delta}} = 2.\text{aire}(ABC) \qquad (1)$$

ii. Soit u une isométrie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que:
$$\frac{\overline{ABC}}{\overline{\Delta}} = \frac{\overline{u(A)u(B)u(C)}}{\overline{\Delta}}$$
En déduire (1) en se ramenant au cas où $A = (0,0)$ et $B = (b,0)$.

iii. Soient $A = (a_1,a_2)$, $B = (b_1,b_2)$ et $C = (c_1,c_2)$. Déduire ce ce qui précède l'expression suivante de l'aire de ABC:
$$\text{air}(ABC) = \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}|$$