Espaces Affines III —

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et f une forme linéaire non nulle sur E. On note $\mathcal{H}$ l'hyperplan affine $\{v \in E;\ f(v) = 1\}$.

   (a) Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F. On suppose que la restriction de u à $\mathcal{H}$ est nulle. Montrer que $u = 0$.

   (b) Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme linéaire de E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

      i. $u(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$,

      ii. $f \circ u = f$,

      iii. Pour tout hyperplan $\mathcal{L}$ parallèle à $\mathcal{H}$, on a $u(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

   On notera $\mathcal{L}in(E)_f$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}in(E)$ formé des applications linéaires vérifiant les conditions précédentes.

   (c) On définit une application $res : \mathcal{L}in(E)_f \longrightarrow \mathcal{A}\!f\!f(\mathcal{H})$ qui à une application linéaire u associe sa restriction à $\mathcal{H}$. Expliquer pourquoi res est bien défini. Montrer que res est bijectif. On notera res^{-1} son inverse.

   (d) On fixe une base $B = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ de E tel que $f(e_0) = 1$ et $f(e_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit $u \in \mathcal{L}in(E)_f$.

      i. Montrer que la matrice M de u dans B est de la forme:

      $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ X & & P & \\ & & & \end{pmatrix}$$

      avec X une matrice $1 \times n$ et P une matrice $n \times n$.

      ii. Montrer que P est la matrice de l'application linéaire $\overrightarrow{res(u)}$.

      iii. Supposons que P n'a pas 1 comme valeur propre. En déduire que 1 est valeur propre simple de M. On note E_1 l'espace propre de M correspondant à la valeur 1. Montrer que E_1 n'est pas contenu dans $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire que $res(u)$ admet un unique point fixe donné par $E_1 \cap \mathcal{H}$.

2. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les deux applications s et t définies par:

$$s(x,y) = (-x,-y) \qquad \text{et} \qquad t(x,y) = (x+1, x+y)$$

   (a) Vérifier que s et t sont des applications affines. Calculer les applications flèches associées $\vec{s}$ et $\vec{t}$. Vérifier que t n'admet pas de points fixes.

   (b) Montrer que s et t sont inversibles et calculer leurs inverses. On notera $G =< s, t >$ le sous-groupe de $\mathbb{G}a\!f\!f(\mathbb{R}^2)$ engendré par s et t. On se propose de calculer G.

   (c) Calculer l'image I de G par l'application flèche $Fl : \mathbb{G}a\!f\!f(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{G}\ell(\mathbb{R}^2)$.

   (d) On appelle N le noyau du morphisme $Fl : G \twoheadrightarrow I$. On a ainsi une suite exacte courte:

$$N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow I$$

   On calculera le sous-groupe N. Vérifier que les éléments de N sont des translations.

   (e) Montrer que N est le sous-groupe de G engendré par les conjugués de $[s,t] = sts^{-1}t^{-1}$. En déduire que N est le groupe de translations de la forme $(2n, 2m+n)$ avec $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.