Université Paris 7 — 20 juin 2006
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

Géométrie pour la Licence : MT 3301

Partiel de juin 2006

Questions de cours

1) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Qu'est-ce qu'on entend par la direction de $\mathcal{F}$?
2) Si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}$ est un deuxième sous-espace affine, que signifie la phrase '$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont parallèles' ?
3) L'énoncé

   La composée de deux homothéties est toujours une homothétie.

   est-il vrai ou faux ? Justifier.
4) Supposons que $\mathcal{E}$ est un plan affine. Soient A, B, C un triplet de points alignés et A', B', C' un deuxième triplet de points alignés. Supposons que $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $A \neq B$ et $A' \neq B'$ et que les droites (AA') et (BB') sont parallèles. Représenter cette configuration dans un dessin et énoncer le théorème de Thalès.

Exercices

I. Soient

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine de direction E. Soient O un point de $\mathcal{E}$ et e_1, e_2 une base de E. Soit $\phi : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base e_1, e_2 est A et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui, en coordonnées par rapport au repère affine (O, e_1, e_2) est décrite par

$$x \mapsto y = Ax + b \,,$$

où x et y sont les colonnes contenant les coordonnées x_1, x_2 et y_1, y_2.

1) Montrer que ϕ est une symétrie linéaire par rapport à un sous-espace F parallèlement à un sous-espace G. Donner des bases de ces sous-espaces.
2) Montrer que f admet (au moins) un point fixe.
3) Montrer que f est une symétrie affine et déterminer l'ensemble de ses points fixes.

II. Avec les notations de l'exercice précédent, soient $A = O$, $B = O + e_1$, $C = O + e_2$, $A' = O + e_1 + 2e_2$, $B' = O + 2e_1 + 2e_2$, $C' = O + e_1 + e_2$.

1) Montrer qu'il existe une unique application affine g qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.

2) Décrire g en coordonnées.
3) Montrer que g n'a pas de points fixes.
4) Déterminer l'ensemble des vecteurs v tels que $t_v \circ g$ est une symétrie.

III. Soit ABC un triangle d'un plan affine $\mathcal{E}$. Soient $L \in (AB)$, $M \in (BC)$ et $N \in (CA)$ trois points distincts de A, B et C. On se propose de montrer que L, M et N sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = -1. \tag{1}$$

1) Soient h_L l'homothétie de centre L qui envoie A sur B, h_M l'homothétie de centre M qui envoie B sur C et h_N l'homothétie de centre N qui envoie C sur A. Quels sont les rapports de ces homothéties ?
2) Montrer que la composée $h_N \circ h_M \circ h_L$ est l'identité si et seulement si l'égalité (**??**) est vraie.
3) Supposons que l'égalité **??** est vraie. Montrer que $h_N^{-1} = h_M \circ h_L$ et déduire que L, M et N sont alignés.
4) Supposons que L, M et N sont alignés. Montrer que $h_M \circ h_L$ est une homothétie h. Montrer que $h = h_N^{-1}$ et conclure que l'égalité (**??**) est vraie.