Université Paris 7 – Denis-Diderot
Exercices – 04/02/2006 – M302 Géométrie

1) Soit F un sous-espace de E. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces tels que

$$E_1 + F = E_2 + F = E.$$

On fait l'hypothèse

$$E_1 \cap F + E_2 \cap F = F.$$

Montrer que $E = E_1 + E_2$ et surtout que $(E_1 \cap E_2) + F = E$.

Corrigé. *Des éléments ds E_1 et E_2 engendrent F, puisque $F = (E_1 \cap F) + (E_2 \cap F)$. Comme $E = (E_1 + F)$, il s'ensuit que $E_1 \cup E_2$ engendre E. Cela est pour la première question.*

Pour la seconde, je pars d'un élément x dans E. J'écris $x = e_1 + f_1 = e_2 + f_2$ et $e_1 - e_2 = z_1 + z_2 \in F$, avec $z_1 \in E_1 \cap F$ et idem pour z_2.

Donc $\varepsilon = e_1 - z_1 = z_2 + e_2 \in E_1 \cap E_2$.

Maintenant si $f = z_1 + f_1$, alors $f \in F$ et $x = \epsilon + f \in E_1 \cap E_2) + F$.

Ce résultat a comme conséquence par exemple que deux plans affines généraux de $\mathbb{R}^4$ se coupent en un unique point.

2) Tranposée d'une application linéaire – Si $f : E \to F$, on note ${}^t f$ l'application suivante

$${}^t f : F^\star \to E^\star, \quad \tau \mapsto ({}^t f)(\tau) = \tau \circ f\,.$$

a) Vérifier que si $M = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, alors $\mathrm{Mat}({}^t f; \mathcal{B}_E^\star, \mathcal{B}_F^\star) = {}^t M$.
b) Déterminer la transposée de la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$.
c) Déterminer la transposée de l'injection canonique $\iota_F : F \hookrightarrow E$, et celle de la surjection canonique $\pi_F : E \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow E/F$.
Indication – La transposée de l'injection canonique ι_F est l'application ρ_F de restriction à F,

$$\rho_F : E^\star \to F^\star\,.$$

La transposée ${}^t(\pi_F)$ applique la forme linéaire $\tau : E/F \to \mathbb{K}$ sur la forme linéaire composée $\tau \circ \pi : E \xrightarrow{\pi} E/F \xrightarrow{\tau} \mathbb{K}$.
b) Comparer $E^\star$ et $F^\star$ lorsque $F \subseteq E$.

Indication – Attention, il ne faut pas dire que $F^\star$ est inclus dans $E^\star$. La réponse correcte est que $F^\star$ est un quotient de $E^\star$. À défaut de maîtriser la notion de quotient, on peut simplement répondre en écrivant la suite exacte courte :

$$F^\perp \hookrightarrow E^\star \xrightarrow{\rho_F} F^\star\,.$$

c) Montrer qu'en dimension finie, on a $\operatorname{Ker}\,{}^tf = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et que $\operatorname{Im}\,{}^tf = (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Noter en particulier que la transposée d'une application injective est surjective et que la transposée d'une application surjective est injective.
d) Soit $\varphi : E \to E^\star$, où E est de dimension finie. Déterminer la transposée de φ. Lien avec les formes quadratiques ? Expliciter le lien entre l'orthogonal au sens d'une forme quadratique et l'orthogonal au sens de la dualité.
e) Montrer que $\det f = \det {}^tf$.

3) a) Calculer le nombre de bases dans un espace vectoriel E de dimension n sur le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Indication – On trouve $(p^n - 1)(p^n - p) \times \cdots \times (p^n - p^{n-1})$.
b) Calculer le nombre de droites vectorielles dans E.
Indication – On trouve $(p^n - 1)/(p - 1)$.
En particulier, le cardinal de la droite projective vaut $p + 1$:

$$\operatorname{Card} \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p) = p + 1\,.$$

Ce qui est bien cohérent avec le fait que la droite projective est l'union de la droite affine et d'un point à l'infini. De même, on vérifie que

$$\operatorname{Card} \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_p) = p^2 + p + 1\,,$$

ce qui confirme l'idée que le plan projectif s'obtient en "adjoignant" une droite (projective) à l'infini au plan affine.
c) Calculer le nombre d'hyperplans dans E.
Indication – Il y a autant d'hyperplans vectoriels que de droites vectorielles, comme il découle simplement d'un argument de passage à l'orthogonal dans le dual.
d) Calculer le nombre de sous-espaces de coordonnées de $\mathbb{F}^n$. Calculer le nombre de plans dans $\mathbb{F}_p^n$.
Indication – En dimension n et sur n'importe quel corps $\mathbb{K}$, le nombre de sous-espaces de coordonnées de $\mathbb{K}^n$ est égal à 2^n. Quant au nombre de plans vectoriels dans $\mathbb{F}_p^n$, le plus simple est de faire opérer le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ sur l'ensemble $\mathfrak{Gr}(2, n, \mathbb{F}_p)$ de ces plans, en y privilégiant l'un d'entre eux, par exemple, le plan P_0 engendré par les deux premiers vecteurs de base. L'application $A : \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p) \to \mathfrak{Gr}(2, n, \mathbb{F}_p)$ qui à l'automorphisme u associe le plan $u(P_0)$ est une application surjective (pourquoi donc ?) dont les fibres ressemblent toutes à la fibre au dessus de P_0. Cette dernière n'est autre que le sous-groupe des matrices de la forme $M = \begin{bmatrix} Q_1 & X \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$, où

$Q_1 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_p)$, $Q_2 \in \mathrm{GL}(n-2,\mathbb{F}_p)$ et $X \in \mathbb{F}_p^{2\times(n-2)}$. On en déduit que

$$\mathrm{Card}\ \mathcal{G}\mathfrak{r}(2,n,\mathbb{F}_p) \ = \ \frac{(p^n-1)(p^n-p)\times\cdots\times(p^n-p^{n-1})}{p^{2(n-2)}\times(p^2-1)(p^2-p)\times(p^{n-2}-1)(p^{n-2}-p)\times\cdots\times(p^{n-2}-p^{n-3})}$$

e) Calculer le nombre de droites affines dans E (considéré comme espace affine).
Indication – Plonger l'espace affine E dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}(E)$ de ses points massiques. Les droites de E sont alors en correspondance bijective avec les plans vectoriels de $\mathcal{M}(E)$, qui ne sont pas contenus dans l'espace vectoriel $\vec{E}$ associé à l'espace affine E. On utilse alors deux fois le calcul de la question précédente.

4) a) Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire sur l'espace vectoriel E. On suppose que τ s'annule sur un hyperplan affine $\mathcal{H}$ d'équation $\tau(x) = 1$. Montrer que φ est nulle.
Indication – Remarquer que la forme linéaire φ s'annule sur le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{H}$.
b) Soit $f : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \to \mathcal{M}(\mathcal{E})$ un endomorphisme de l'espace vectoriel des points massiques de l'espace affine $\mathcal{E}$. On suppose que f conserve l'espace affine $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Montrer que f laisse stables tous les hyperplans affines parallèles à $\mathcal{E}$, et, en particulier, laisse stable la direction E de $\mathcal{E}$.
Indication – Si $\tau = 1$ est l'équation de $\mathcal{E}$, la forme linéaire $\tau - \tau \circ f$ s'annule sur $\mathcal{E}$.
c) Les aplications affines de $\mathcal{E}$ s'identifient aux endomorphismes de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ qui laissent stable $\mathcal{E}$, ou ce qui revient au même, qui vérifient ${}^t f(\tau) = \tau$. Le groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$, autrement dit le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$, s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$ formé des automorphismes qui laissent stable $\mathcal{E}$. Si l'on choisit dans $\mathcal{E}$ un repère cartésien affine $\mathcal{R}$, autrement dit, si l'on choisit un point Ω de $\mathcal{E}$ et une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $E = \vec{\mathcal{E}}$, la forme matricielle $\mathrm{M}(f,\mathcal{R})$ d'un élément courant $f \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$ dans la base $\mathcal{R} = (e_1, e_2, \ldots, e_n, \Omega)$ de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est

$$\mathrm{M}(f,\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} P & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

avec $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.
Vérifier que

$$P = \mathrm{Mat}(\vec{f}, (e_i))$$

c) Vérifier que si la matrice P n'admet pas un comme valeur propre, autrement dit, si la valeur propre 1 est simple pour la matrice $\mathrm{M}(f,\mathcal{R})$, la transformation affine f admet un et unique point fixe dans $\mathcal{E}$.
Indication – Il s'agit de démontrer que le sous-espace propre de $\mathrm{M}(f,\mathcal{R})$ associé à la valuer propre simple 1 n'est pas contenu dans E. Ce qui est évident.

5) La donnée sur un espace vectoriel $\mathcal{M}$ d'une forme linéaire τ non nulle et d'un vecteur v (non nul) de l'hyperplan noyau définit automatiquement un automorphisme de notre espace que l'on appelle transvection vectorielle et que l'on note $T_{\tau,\vec{v}}$

$$T_{\tau,\vec{v}}(x) = x - \tau(x)v\,.$$

Une transvection laisse fixe les points de l'hyperplan vectoriel $\tau = 0$ et translate tout autre vecteur de l'espace par un vecteur parallèle à v. On dispose de la suite exacte courte associée à $T_{\tau,\vec{v}} - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$:

$$\operatorname{Ker}\tau \hookrightarrow \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathbb{K}v\,.$$

Une telle transvection laisse invariant en particulier l'hyperplan affine $\tau = 1$. Comment y opère-t-elle?

Morale – Une translation $T_{\vec{v}}$ de l'espace affine $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$ donne naissance à une transvection vectorielle, car on est en présence d'une forme linéaire non nulle τ : $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \to \mathbb{K}$ et d'un vecteur $\vec{v} \in \ker\tau$. La translation $T_{\vec{v}}$ est en fait la restriction de la transvection vectorielle $T_{\tau,\vec{v}}$ à l'espace affine $\mathcal{E}$.

6) L'espace affine des applications affines – L'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ des applications affines de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ s'identifie aux applications linéaires

$$f : \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{M}(\mathcal{E}_2) \quad \text{telles que} \quad {}^t f(\tau_2) = \tau_1\,.$$

a) Montrer qu'un tel ensemble est naturellement un sous-espace affine de l'espace vectoriel

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{M}(\mathcal{E}_1),\mathcal{M}(\mathcal{E}_2))\,,$$

et que sa direction $A(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ est le sous-espace vectoriel formé des applications linéaires f telles que ${}^t f(\tau_2) = 0$, ou encore des applications linéaires dans

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{M}(\mathcal{E}_1),\mathrm{E}_2)\,.$$

b) Vérifier que sa dimension est égale à $(\dim E_1 + 1) \times \dim E_2 = pq + q$.
c) Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2))$ des points massiques de $\mathcal{A}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ s'identifie à l'espace vectoriel des applications linéaires $f : \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$ telles que $\tau_2 \circ f \circ \iota_{\operatorname{Ker}\tau_1} = 0$, muni de la forme linéaire (non nulle) qui à une telle application linéaire f associe la coordonnée du vecteur $\tau_2 \circ f$ de la droite $(\operatorname{Ker}\tau_1)^\perp$ par rapport à la base formée de l'unique vecteur τ_1. On notera au passage que la dimension de cet espace vectoriel est la bonne et s'obtient en regardant la suite exacte courte

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{M}(\mathcal{E}_1),\mathrm{E}_2) = \operatorname{Ker}\Psi \hookrightarrow \Psi^{-1}(\operatorname{Ker}\tau_1)^\perp \twoheadrightarrow (\operatorname{Ker}\tau_1)^\perp = \mathbb{K}\tau_1,$$

où

$$\Psi : \operatorname{Hom}(\mathcal{M}(\mathcal{E}_1),\mathcal{M}(\mathcal{E}_2)) \to \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)^\star, \qquad f \mapsto \tau_2 \circ f\,.$$

Morale – On retient qu'il s'agit de penser au sous-espace vectoriel des applications $f : \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$ telles que $\tau_2 \circ f = \lambda_f\,\tau_1$ pour un λ_f adéquat de $\mathbb{K}$, et que $f \mapsto \lambda_f$ est la bonne forme linéaire à considérer sur ce sous-espace.
On retient surtout que l'on peut parler du barycentre de deux ou de plusieurs aplications affines et, en particulier, du milieu de deux homothéties affines, etc.