Université Paris 7 5 juin 2006
U.F.R. de Mathématiques B. Keller

Géométrie pour la Licence de Mathématiques L2/L3 : MT 3301

Un corrigé de l'examen de Juin 2006

Question de cours

1) Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions E et F et soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application. Enoncer deux conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit une application affine.

   Réponse — L'application f est affine ssi elle conserve les barycentres ssi il existe une application linéaire $\phi : E \to F$ telle que, pour tout point P de $\mathcal{E}$ et tout vecteur v de E, on a $f(P + v) = f(P) + \phi(v)$.

2) L'énoncé suivant, est-il vrai ou faux ? Justifier.

   > Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine, l'image de tout plan de $\mathcal{E}$ est un plan ou une droite.

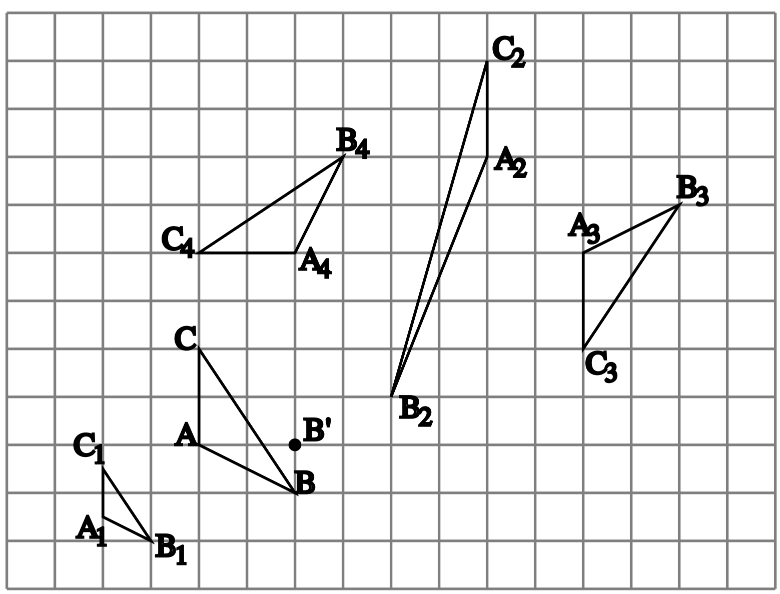
   Réponse — Il est faux. Par exemple, si $\mathcal{F}$ est réduit à un point, l'image par f de tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est réduite à un point.

3) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et soit f un déplacement de $\mathcal{E}$. Que peut-on dire de f en fonction de son ensemble de points fixes ?

   Réponse — Si l'ensemble des points fixes est le plan tout entier, alors f est l'identité. L'ensemble des points fixes ne peut pas être une droite (car, parmi les isométries de $\mathcal{E}$, seules les symétries orthogonales par rapport à des droites ont pour ensemble de points fixes une droite). Si l'ensemble des points fixes est réduit à un point, alors f est une rotation. Si l'ensemble des points fixes est vide, alors f est une translation de vecteur non nul.

Exercices

I. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on considère les triangles suivants :



Soit f_i l'application affine qui envoie A, B, C sur A_i, B_i, C_i, $1 \leq i \leq 4$. Pour chacune des applications f_i, répondre succinctement aux questions suivantes en se servant si nécessaire du repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC})$:

1) Décrire l'application géométriquement.

Réponse — L'application f_1 est l'homothétie de rapport $1/2$ et dont le centre a pour coordonnées $-2, -3/2$. L'application f_2 est la symétrie (non orthogonale) par rapport à la droite d'équation $x = 3/2$ parallèlement à la droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC}$. L'application f_3 est le glissement de vecteur $4\ \overrightarrow{AB'}$ par rapport à la droite (CC_3). L'application f_4 est la rotation de mesure $\pi/2$ autour du point de coordonnées $-1/2$, $3/2$ dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC})$.

2) L'application, est-elle bijective, une isométrie, un déplacement ?

Réponse — Toutes les applications sont bijectives. Les applications f_1 et f_2 ne sont pas des isométries, mais f_3 et f_4 le sont. L'application f_3 est un antidéplacement et f_4 est un déplacement.

3) Décrire l'application sous la forme $x \mapsto M_i x + b_i$, où x est le vecteur de coordonnées par rapport au repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC})$, M_i est une matrice 2×2 et $b_i \in \mathbb{R}^2$ un vecteur.

Réponse — Nous avons

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3/4 \end{bmatrix} \\
M_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
M_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\
M_4 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

II. Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, O un point de $\mathcal{E}$ et e_1, e_2 une base orthonormée de la direction E de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble formé des quatre points $O + e_1$, $O + e_2$, $O - e_1$, $O - e_2$.

1) Soit f une transformation affine telle que $f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. Montrer que $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ et que O est un point fixe de f.

Réponse — Comme f est bijective, l'ensemble $f(\mathcal{X})$ est de cardinal 4. Comme $\mathcal{X}$ est de même cardinal et qu'on a $f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$, on doit avoir l'égalité. Le point O est l'isobarycentre des points de $\mathcal{X}$. Comme f est affine, le point $f(O)$ est l'isobarycentre des points de $f(\mathcal{X})$. Puisqu'on a $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, il s'ensuit que $f(O) = O$.

2) Déterminer toutes les possibilités pour la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base e_1, e_2.

Réponse — Puisque f permute les points $O \pm e_i$, les colonnes de la matrice de $\overrightarrow{f}$ sont parmi

$$\begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Comme les colonnes ne sont pas proportionnelles, seules les matrices

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$, sont possibles. Réciproquement, chacune de ces huit matrices apparaît comme la partie linéaire d'une transformation affine f qui permute les quatre points.

3) Montrer que f est une isométrie.

Réponse — Les huit matrices obtenues ci-dessus sont clairement orthogonales.

4) Montrer que l'ensemble G des transformations affines f telles que $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ est un sous-groupe du groupe des isométries formé de 8 éléments.

   Réponse — Clairement G contient l'identité, est stable par composition et par passage à l'inverse. Donc il s'agit bien d'un sous-groupe du groupe des isométries. Chaque élément fixe le point O et est donc déterminé par sa partie lináire. On a montré ci-dessus qu'il y a exactement huit possibilités pour la partie lináire. Donc G est bien d'ordre 8.

5) Décrire géométriquement les éléments de G.

   Réponse — Outre l'identité, le groupe G contient les quatre symétries par rapport à des droites, à savoir les diagonales du carré formé des quatre points et les droites passant par les milieux de côtés opposés. En outre G contient trois rotations de mesures $\pi/2$, π et $3\pi/2$.

6) Dresser la liste des sous-groupes à deux éléments de G.

   Réponse — La donnée d'un sous-groupe à deux éléments équivaut à celle d'un élément d'ordre 2 du groupe G. Il y en a cinq : les quatre symétries orthogonales par rapport à des droites et la symétrie par rapport à O (qui est aussi la rotation de mesure π).

7) Dresser la liste des sous-groupes à quatre éléments de G.

   Réponse — Un groupe d'ordre 4 est oubien cyclique oubien isomorphe à un produit de deux groupes d'ordre deux. Dans le premier cas, il est engendré par un élément d'ordre 4. Or le groupe G ne contient qu'un seul élément d'ordre 4, à savoir la rotation de mesure π. Dans le deuxième cas, le sous-groupe contient deux sous-groupes d'ordre 2 qui commutent. On obtient que le sous-groupe est alors formé de l'identité, de la rotation de mesure π et des symétries par rapport à deux droites orthogonales : les diagonales ou bien les droites qui joignent les milieux des côtés.

III. Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un glissement par rapport à une droite $\mathcal{D}$. Soit O un point de $\mathcal{E}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{X}$ la partie de $\mathcal{E}$ formée des points $f^n(O)$, $n \in \mathbb{Z}$. Soit G le groupe des isométries g de $\mathcal{E}$ telles que $g(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. On se propose de déterminer G. Soit $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par O et $\mathcal{D}''$ la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par $f(O)$.

1) Montrer que G contient le groupe formé des f^m, $m \in \mathbb{Z}$.

   Réponse — Nous avons $f^m(f^n(O)) = f^{n+m}(O)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc la transformation f^m appartient bien à G.

2) Montrer que pour tout élément g de G, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n g$ appartient à G et admet O pour point fixe.

   Réponse — Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(O) = f^{-n}(O)$. Alors nous avons $f^n g(O) = O$ et $f^n g$ appartient à G car g et f^n appartiennent à G.

3) Montrer que $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont les seules droites de $\mathcal{E}$ contenant trois points distincts deux à deux de $\mathcal{X}$. Déduire que tout $g \in G$ laisse stable la réunion de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.

   Réponse — Si $\mathcal{F}$ est une droite contenant trois points de $\mathcal{X}$, alors parmi ces points se trouvent deux distincts et du même côté de $\mathcal{D}$. Alors $\mathcal{F}$ doit être la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par ces deux points. Donc $\mathcal{F}$ est égale à $\mathcal{D}'$ ou à $\mathcal{D}''$. En particulier, l'image par g de $\mathcal{D}'$ est une droite contenant trois points de $g(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Donc elle est égale à $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{D}''$.

4) Montrer que l'on a $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ pour tout $g \in G$.

   Réponse — D'après le point précédent, la transformation g laisse stable la réunion de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$. Donc elle laisse stable l'ensemble des milieux d'un point de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{D}''$. Or cet ensemble est égal à $\mathcal{D}$.

5) Soit g une transformation dans G qui admet O pour point fixe. Montrer que g est l'identité ou la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par O.

   Réponse — La transformation g laisse stable la droite $\mathcal{D}$ et y induit une isométrie. Si c'est l'identité, alors g est l'identité. Sinon, la transformation induite est la symétrie par rapport au projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$ et g est la symétrie orthogonale par rapport à la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par O.

6) Montrer que tout élément g de G est de la forme $f^n\sigma^e$, où $e \in \{0,1\}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Réponse — Supposons que $g(O) = f^n(O)$, où $n \in \mathbb{Z}$. Alors la transformation $f^{-n}g$ admet O pour point fixe et appartient à G. Si c'est l'identité, nous avons $g = f^n$. Si c'est σ, nous avons $g = f^n\sigma$.