Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques

5 juin 2006
B. Keller

Géométrie pour la Licence de Mathématiques L2/L3 : MT 3301

Examen de Juin 2006

Question de cours

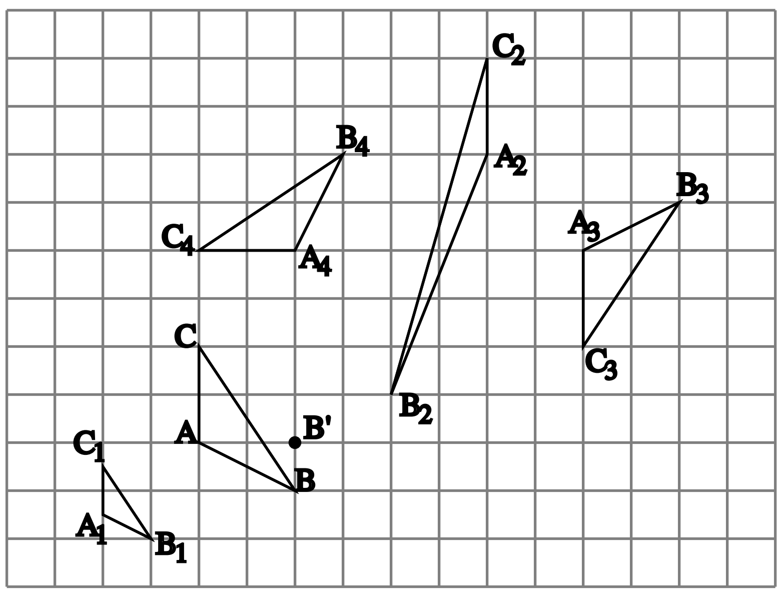
1) Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions E et F et soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application. Enoncer deux conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit une application affine.
2) L'énoncé suivant, est-il vrai ou faux ? Justifier.

   Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine, l'image de tout plan de $\mathcal{E}$ est un plan ou une droite.

3) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et soit f un déplacement de $\mathcal{E}$. Que peut-on dire de f en fonction de son ensemble de points fixes ?

Exercices

I. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on considère les triangles suivants :



Soit f_i l'application affine qui envoie A, B, C sur A_i, B_i, C_i, $1 \leq i \leq 4$. Pour chacune des applications f_i, répondre succinctement aux questions suivantes en se servant si nécessaire du repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC})$:

1) Décrire l'application géométriquement.
2) L'application, est-elle bijective, une isométrie, un déplacement ?
3) Décrire l'application sous la forme $x \mapsto M_i x + b_i$, où x est le vecteur de coordonnées par rapport au repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC})$, M_i est une matrice 2×2 et $b_i \in \mathbb{R}^2$ un vecteur.

II. Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, O un point de $\mathcal{E}$ et e_1, e_2 une base orthonormée de la direction E de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble formé des quatre points $O + e_1$, $O + e_2$, $O - e_1$, $O - e_2$.

1) Soit f une transformation affine telle que $f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. Montrer que $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ et que O est un point fixe de f.
2) Déterminer toutes les possibilités pour la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base e_1, e_2.
3) Montrer que f est une isométrie.
4) Montrer que l'ensemble G des transformations affines f telles que $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ est un sous-groupe du groupe des isométries formé de 8 éléments.
5) Décrire géométriquement les éléments de G.
6) Dresser la liste des sous-groupes à deux éléments de G.
7) Dresser la liste des sous-groupes à quatre éléments de G.

III. Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un glissement par rapport à une droite $\mathcal{D}$. Soit O un point de $\mathcal{E}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{X}$ la partie de $\mathcal{E}$ formée des points $f^n(O)$, $n \in \mathbb{Z}$. Soit G le groupe des isométries g de $\mathcal{E}$ telles que $g(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. On se propose de déterminer G. Soit $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par O et $\mathcal{D}''$ la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par $f(O)$.

1) Montrer que G contient le groupe formé des f^m, $m \in \mathbb{Z}$.
2) Montrer que pour tout élément g de G, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n g$ appartient à G et admet O pour point fixe.
3) Montrer que $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont les seules droites de $\mathcal{E}$ contenant trois points distincts deux à deux de $\mathcal{X}$. Déduire que tout $g \in G$ laisse stable la réunion de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.
4) Montrer que l'on a $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ pour tout $g \in G$.
5) Soit g une transformation dans G qui admet O pour point fixe. Montrer que g est l'identité ou la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par O.
6) Montrer que tout élément g de G est de la forme $f^n \sigma^e$, où $e \in \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{Z}$.