Université Paris 7 – Denis-Diderot
Examen – 07/09/2006 – Géométrie pour la Licence L2/L3

1) Question de cours – Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, E son espace vectoriel associé et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. On note $\vec{f}$ la partie linéaire de f, appelée aussi la flèche de f. On a $\vec{f} : E \to E$.

Rappeler la définition de $\vec{f}$ et démontrer que f est une translation si, et seulement si, $\vec{f} = Id_E$.

2) Montrer que l'ensemble $T(\mathcal{E})$ des translations de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe distingué du groupe affine $GA(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$. Rappeler à cette occasion, mais sans en donner une démonstration, la formule qui donne le conjugué $f \circ T_{\vec{v}} \circ f^{-1}$ de la translation $T_{\vec{v}}$ par la transformation affine f.

3) On note p_{Δ,D_0} la projection dans le plan affine $\mathcal{E}_2$ sur la droite Δ parallèlement à la direction (vectorielle) D_0. On note Δ_0 la direction de la droite Δ. On a bien sûr, $E_2 = D_0 \oplus \Delta_0$. Soit $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ une transformation affine dans $\mathcal{E}_2$.
a) Démontrer que $f(\Delta)_0$ et $\vec{f}(D_0)$ sont supplémentaires.
b) En déduire que
$$f \circ p_{\Delta,D_0} \circ f^{-1} = p_{f(\Delta),\vec{f}(D_0)}.$$
c) Soit $h(\Omega, \lambda)$ l'homothétie de $\mathcal{E}_2$ de centre Ω et de rapport λ. Calculer
$$f \circ h(\Omega, \lambda) \circ f^{-1}.$$
d) Énoncer, puis démontrer de deux façons différentes, la condition de commutativité d'une projection affine (sur une droite) et d'une homothétie dans $\mathcal{E}_2$.
e) Énoncer la condition de commutativité d'une translation et d'une projection affine dans $\mathcal{E}_2$.

4) On se donne deux translations (indépendantes) T_1 et T_2, et une droite Δ de l'espace affine $\mathcal{E}_2$. Soit M un point courant de Δ et soit M' l'image de M par T_1 et M'' l'image de M' par T_2. On appelle G le centre de gravité du triangle $MM'M''$. Déterminer le lieu de G.

5) Soit M un point courant sur le côté BC d'un triangle ABC et M' le symétrique de M par rapport au milieu I de BC. Les parallèles menées respectivement par M et M' aux côtés AB et AC se coupent en P. Montrer que les points A, P et I sont alignés.

6) Soit ABC un triangle et AI la médiane relative au côté BC. D'un point variable M de la droite BC, on mène une droite parallèle à AI qui coupe AB et AC en X et Y. Déterminer le lieu du milieu J de XY.

7) Dans cet exercice, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien. On se donne deux isométries f et g de $\mathcal{E}$. On suppose par ailleurs que f et g possèdent des points fixes et qu'elles commutent. On se propose de démontrer que f et g ont au moins un point fixe en commun.
a) Démontrer pour commencer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des points fixes de f est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. En décrire la direction F.
b) Démontrer que le sous-espace affine $\mathcal{F}$ est invariant par g, autrement dit $g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.
c) Soit Ω un point fixe de g et ω la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{F}$. Démontrer que ω est un point fixe commun à f et g.
Indication – On pourra établir que le sous-espace affine $\Omega + F$ est stable par g.
d) Que peut-on alors dire dans le cas où l'on a en plus que $\vec{f} = \vec{g}$?

8) On se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$.
a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la composée d'une rotation et d'une symétrie soit une symétrie.
b) Déterminer la composée d'une réflexion par rapport à l'axe Δ et d'un demi-tour de centre $\Omega \in \Delta$.
c) Préciser la composée d'une réflexion d'axe Δ et d'un demi-tour centré ailleurs que sur l'axe.
d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe engendré par une réflexion et un demi-tour soit fini.
e) Déterminer la nature de ce groupe dans le cas fini.

9) Soit A un point fixe et soit D_1 et D_2 deux droites sécantes en Ω. Soit δ une droite variable, perpendiculaire en H à la bissectrice (intérieure) ΩX des droites D_1 et D_2, et les coupant en R et S respectivement. On considère le symétrique A_1 du point A par rapport à δ et on considère A' défini par $\vec{SA'} = \vec{RA_1}$.
a) Démontrer que le glissement g d'axe δ qui applique D_2 sur D_1 vérifie $g(A) = A'$.
b) Démontrer que la distance de A à D_2 est égale à la distance de $A' = g(A)$ à $D_1 = g(D_2)$.
c) Déterminer alors le lieu du point A'.
d) On considère le symétrique B de A par rapport à la bissectrice. Constater que le point S est le milieu de BA' et retrouver alors le lieu de A.

10) Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On note par AA', BB' et CC' les hauteurs issues respectivement de A, B et C.
a) Démontrer que $s_{AA'} \circ s_{BB'} \circ s_{CC'} = s_{CC'} \circ s_{BB'} \circ s_{AA'}$.
b) Déterminer la symétrie $s_{AA''} \circ s_{BB''} \circ s_{CC''}$, où AA'', BB'' et CC'' sont cette fois-ci les bissectrices intérieures du triangle.