Université Paris 7 – Denis-Diderot
Exercices – 26/01/2006 – M302 Géométrie

1) Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 10 & -10 & 1 & -26 & -25 \end{bmatrix}.$$

Affiner et inverser les contrôles sur le noyau et sur l'image de A.

Solution – *La matrice $A \in \mathbb{K}^{3\times 5}$ définit une application linéaire, notée encore A,*

$$A : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^3,$$

à laquelle correspond l'écriture en suite exacte courte

$$\operatorname{Ker} A \hookrightarrow \mathbb{K}^5 \twoheadrightarrow \operatorname{Im}(A) \subseteq \mathbb{K}^3.$$

On jouxte la matrice I_3 à la gauche de A et on procède à l'échelonnement du tout.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -10 & 1 & -26 & -25 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 & -10 & 1 & -26 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1/10 \leftarrow L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 & -1 & 0.1 & -2.6 & -2.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \leftarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 & -1 & 0.1 & -2.6 & -2.5 \\ 0 & 1 & -0.2 & 0 & 0 & 0.8 & 3.2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 & -1 & 0.1 & -2.6 & -2.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -0.2 & 0 & 0 & 0.8 & 3.2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 0.8L_2 \leftarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 & -1 & 0.1 & -2.6 & -2.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ -0.8 & 1 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 - 0.1L_2 \leftarrow L_1} \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0.1 & 1 & -1 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ -0.8 & 1 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cela fournit l'échelonnée

$$\acute{E}L(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de A, et une matrice inversible $P = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -0.8 & 1 & -0.2 \end{bmatrix}$ *telle que*

$$PA = \acute{E}L(A).$$

Procédons aux vérifications standard. Les deux relations $C_4 = -3C_1 + 4C_3$ et $C_5 = -3C_1 + 5C_3$, lisibles sans effort dans l'échelonnée, sont bien vérifiées par les colonnes correspondantes de A. Le plus rassurant est d'effectuer évidemment le produit PA et de vérifier qu'il vaut bien $\acute{E}L(A)$, et ce que nous laissons au lecteur de faire illico presto !

Le rang de $\acute{E}L(A)$ égal au nombre de lignes non nulles est 2. La dimension $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$ *vaut aussi 2, et le théorème de l'oiseau (alias théorème du rang) donne* $\dim \operatorname{Ker} A = 5 - 2 = 3$. *On a donc*

$$\operatorname{Ker} A^{^{(3)}} \hookrightarrow \mathbb{K}^5 \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(A)^{^{(2)}} \subseteq \mathbb{K}^3$$

L'image est un hyperplan de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}^3$ et le noyau est un sous-espace de codimansion 2 de l'espace de départ.

a) Affinement du contrôle du noyau de A. *Le noyau est donné au départ par le système d'équations*

$$\begin{array}{rrrrrcl} & & z & +4t & +5u & = & 0 \\ 2x & -2y & +z & +4t & +5u & = & 0 \\ 10x & -10y & +z & -26t & -25u & = & 0 \end{array}$$

Comme $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \acute{E}L(A)$, *on le contrôle par les deux seules équations lisibles dans $\acute{E}L(A)$*

$$\begin{array}{rrrrrcl} x & -y & & -3t & -3u & = & 0 \\ & & z & +4t & +5u & = & 0 \end{array}$$

Cela est cohérent avec le fait que $\operatorname{Ker}(A)$ *est de codimension deux.*

b) Équations de l'image, ou l'inversion du contrôle sur l'image. *L'image* $\mathrm{Im}(A)$ *est contrôlée au départ par les générateurs que sont les colonnes de A. Les lignes de P en face des lignes nulles de l'échelonnée nous fournissent un système d'équations minimal de l'image. Ici, seule la dernière ligne de $\acute{E}L(A)$ est nulle. On a donc que l'image est un hyperplan de $\mathbb{K}^3$ d'équation (à scalaire multiplicatif non nul près) $4x - 5y + z = 0$. Une vérification sur la dernière colonne de A indique que ce vecteur colonne est bien dans notre plan vectoriel.*

c) Affinement du contrôle de l'image. *L'image est engendrée par les colonnes de A. Mais l'on peut se contenter des première et troisième colonne. C'est en effet dans les colonnes de mêmes numéros que se trouvent les marqueurs d'échelon de $\acute{E}L(A)$.*

d) Inversion du contrôle sur $\operatorname{Ker} A$. *Il nous reste à produire un système de générateurs minimal du noyau. À cet effet, on coiffe l'échelonnée de la matrice I_5 et on manipule élémentairement les colonnes de l'échelonnée (et du même coup la grande matrice), en vue d'arriver à la matrice $I_2(3,5)$.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

$$\xrightarrow{C_4 - 4C_2 \leftarrow C_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On met en évidence la matrice inversible $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *On vérifie que* $\acute{E}L(A)Q = I_2(3,5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Les trois dernières colonnes de Q (précisément celles qui surplombent les colonnes nulles de la matrice $I_2(3,5)$ fournissent une base*

$$\mathcal{B}_A = ((1,1,0,0,0); (3,0,-4,1,0); (3,0,-5,0,1))$$

de $\operatorname{Ker} A$.

Il ne coûte rien, pour se rassurer, de vérifier, par exemple, que le vecteur $(3,0,-5,0,1)$ *annule bien A.*

On aura noté que l'on a mis en ce faisant en évidence deux matrices inversibles P et Q qui fournissent une réduction de Steinitz de A :

$$PAQ = I_2(3,5).$$

2) a) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sans faire usage de la dimension.
b) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par une droite, un plan, deux droites, un cône, une sphère, un cercle.
c) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les matrices de trace 1, par celles de poids 1, celles qui sont nilpotentes, celles qui sont de déterminant nul et de poids nul.
d) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les polynômes de degré 3, par ceux de dérivée en 0 égale à 1.
e) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les solutions de l'équation différentielle $y' + y = x + 1$.

3) a) Soit A une matrice carrée d'ordre 2. Calculer

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A.$$

Solution – *Un calcul direct donne* $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A = -\mathrm{Det}(A)I_2$.

b) En déduire que si A est de trace nulle, alors son carré A^2 commute avec toute matrice $M \in M(2, \mathbb{K})$:

$$\forall\, M, \qquad AM = MA\ .$$

Solution – *La matrice A^2 est alors une matrice scalaire, et commute donc avec toutes les matrices.*

c) On se donne trois matrices quelconques A, B et C de $M(2, \mathbb{K})$. Montrer que

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0$$

On pourra comparer les traces de AB et de BA.

Solution – *Il suffit d'établir que la trace de la mlatrice $AB - BA$ est nulle. comme la trace est une forme linéaire, il suffit de prouver que* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$*, mais cela est un résultat rencontré en cours.*

4) a) Décrire les sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à cefficients réels.

Solution – *Il se répartissent suivant leur dimension en cinq familles. Tout d'abord le sous-espace réduit à la matrice nulle. Ensuite les droites passant par l'origine, les plans passant par l'origine, les hyperplans de $M(2, \mathbb{R})$ et, enfin, l'espace $M(2, \mathbb{R})$ lui-même.*
b) L'ensemble des matrices $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ de trace égale à 1 en est-il un ? Qu'en est-il de l'ensemble des matrices de déterminant nul, ou celui des matrices dont les deux coefficients diagonaux sont nuls ?

Solution – *L'ensemble des matrices de trace* 1 *n'est pas un sous-espace vectoriel, car il ne contient pas la matrice nulle. L'ensemble des matrices de déterminant nul n'est pas stable* *par addition. Les matrices E_{11} et E_{22} y figurent, mais leur somme I_2 n'y est pas ! Par contre, les matrices à diagonale nulle forment bien un sous-espace, qui est d'ailleurs de dimension* 2.

c) Quel est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices de carré nul ?

Solution – *Il s'agit de déterminer donc le sous-espace engendré par les matrices nilpotentes, qui sont, comme on le sait, caractérisées par le fait que leur trace et leur déterminant sont nuls. Le sous-espace engendré par ces matrices contient la matrice E_{12}, mais aussi la matrice E_{21} qui est indépendante de la précédente. Il contient donc le plan P de la question précédente. Il contient par ailleurs la matrice* $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ *qui n'est pas dans P. Il contient donc l'hyperplan H des matrices engendré par P et N. Il est enfin contenu dans l'hyperplan H_0 des matrices de trace nulle. Coïncé entre deux hyperplans, il est égal à chacun d'eux ! La réponse est donc que* le sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes est l'hyperplan H_0 des matrices de trace nulle. *On obtient au passage que les trois matrices E_{12}, E_{21} et N en forment une base.*

5) a) Écrire les suites exactes courtes asociées à l'application trace, au déterminant, à la l'exponentielle, à la signature, au module d'un nombre complexe, au poids d'une matrice, à la restriction de l'endomorphisme f à $\mathrm{Ker}\, f^2$, puis à $\mathrm{Ker}\, f^3$.
b) Écrire la suite exacte associée à l'homomorphisme flèche, qui à une application affine associe sa partie linéaire.
c) Rappeler la définition d'un sous-groupe distingué. Expliciter la suite exacte associée à un sous-groupe distingué. (On pensera à l'idée de quotient.)
d) Écrire la suite exacte associée à l'opération de restriction à un sous-espace $F \subseteq E$ pour les formes linéaires sur E.

6) a) Déterminer la transposée de l'injection canonique $F \hookrightarrow E$, et celle de la surjection canonique $E \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow E/F$.
b) Comparer $E^\star$ et $F^\star$ lorsque $F \subseteq E$.
c) Soit $\varphi : E \to E^\star$, où E est de dimension finie. Déterminer la transposée de φ. Lien avec les formes quadratiques ? Expliciter le lien entre l'orthogonal au sens d'une forme quadratique et l'orthogonal au sens de la dualité.
d)) Soit $G \subseteq F$ un sous-espace vectoriel de F et $f : E \to F$ une application linéaire. Écrire la suite exacte associée à la restriction de f à l'image réciproque $f^{-1}(G)$. En déduire une formule sur la dimension d'icelle.

7) a) Calculer le nombre de bases dans un espace vectoriel E de dimension n sur le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
b) Calculer le nombre de droites vectorielles dans E.
c) Calculer le nombre d'hyperplans dans E.
d) Calculer le nombre de sous-espaces de coordonnées de $\mathbb{F}^n$. Calculer le nombre de plans

dans $\mathbb{F}_p^n$.
e) calculer le nombre de droites affines dans E.

8) a) Rappeler le calcul de la dimension de $\mathbb{E}^\star$.
b) Que désignent les formes linéaires coordonnées ?
c) Déterminer l'orthogonal d'une somme de sous-espaces et l'orthogonal d'une intersection. (On se placera en dimension finie.)
d) Montrer que

$$(E/F)^\star \simeq F^\perp \,.$$

e) Montrer que

$$E^\star/F^\perp \simeq F^\star \,.$$

9) a) Déterminer une base de l'hyperplan d'équation $2x - y + z - t = 0$.
b) Déterminer une base de l'hyperplan des matrices de poids nul.
c) Déterminer une base de l'esapce vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 et tels que

$$\int_0^1 P(x)dx = 0\,.$$

10) Montrer que si F et G sont de codimension finie dans E, il en est de même de leur intersection $F \cap G$.

Indication – On remarquera tout d'abord que $F/(F\cap G) \simeq (F+G)/G$, et que ce dernier espace se réalise comme un sous-espace de E/G. Par suite, le sous-espace $F \cap G$ est de codimension finie dans F. On conclut en invoquant la suite exacte

$$\{0\} \to F/F\cap G \to E/F\cap G \to E/F \to \{0\}\ .$$

11) Montrer également que $F + G$ est de codimension finie dans E, en réalisant $E/(F + G)$ comme quotient de E/G.

12) Montrer alors que

$$\mathrm{codim}(F\cap G) - \mathrm{codim}(F) = \mathrm{codim}(G) - \mathrm{codim}(F+G)\ ,$$

ou encore

$$\mathrm{codim}(F+G) + \mathrm{codim}(F\cap G)\ = \mathrm{codim}(F) + \mathrm{codim}(G).$$

13) **La formule de Taylor pour les polynômes** – On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où le corps commutatif $\mathbb{K}$ est supposé contenir $\mathbb{Q}$.

1. Combien y a-t-il de formes linéaires dessus ?
2. Décrire l'ensemble des polynômes de E qui sont de degré n puis ceux qui sont de degré $n - 1$.

3. On considère l'ensemble H des polynômes de E dont la somme des coefficients est nulle. Montrer que H est un hyperplan de E. Montrer que H est l'intersection avec E d'un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$. (On constatera que 1 est racine de tels polynômes.)
4. Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère la famille $\{f_0, \ldots, f_n\}$ de $n+1$ formes linéaires sur E, où f_i est la forme qui au polynôme P associe la valeur en a de sa dérivée i-ème, soit $f_i(P) = P^{(i)}(a)$. Montrer que l'intersection de leurs noyaux est réduite à $\{0\}$. En déduire que la famille considérée est une base de E^*.
5. Montrer que toute base de E^* est la base duale d'une base de E. (On pourra penser à l'identification de E et de son bidual !)
6. Expliciter ensuite la base de E dont la base $\{f_0, \ldots, f_n\}$ de E^* est la base duale. (La base cherchée est formée des polynômes $\frac{(X-a)^i}{i!}$.) Retrouver alors la formule de Taylor.

14) Les polynômes d'interpolation de lagrange – On se propose de démontrer qu'un polynôme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ est entièrement déterminé, et ce explicitement, par les valeurs qu'il prend en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.

1. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires distincts. Montrer que les formes linéaires $f_i : E \to \mathbb{K}$ définies par $f_i(P) = P(a_i)$ forment une base. (On pourra utiliser le fait que sur un corps commutatif, un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui a $n+1$ racines distinctes est nul.)
2. Expliciter la base de E dont la base duale est formée par les $n+1$ formes linéaires f_i, où $i = 0, \ldots, n$.
3. En déduire que le polynôme P dans E qui applique les différents a_i sur les scalaires i est donné par $P(X) = \sum_{i=0}^{i=n} iL_i(X)$, où le polynôme $L_i(X)$ est le i-ème polynôme de lagrange associé à la famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, qui est de degré n et qui est défini par
$$L_i(X) = \frac{(X-a_0)(X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}\ .$$
4. Calculer la dimension de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et qui sont multiples du même polynôme $D(X)$ qui est de degré $d \leq n$. (Penser à la division euclidienne par $D(X)$ et constater que la nullité du reste correspond à d conditions linéaires indépendantes. L'espace cherché est de dimension $n+1-d$.)
5. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{K}_7[X]$ qui admettent 1 comme racine multiple d'ordre au moins 4 ?
6. Décrire l'ensemble C des polynômes de $\mathbb{K}_7[X]$ qui admettent 1 comme racine multiple d'ordre 4. Quel est le sous-espace vectoriel engendré par C ?