Université Paris 7 – Denis-Diderot
Exercices (4) – 11/02/2006 – M302 Géométrie

1) On se propose de déterminer le sous-espace affine engendré par les matrices nilpotentes de $\mathbb{K}^{3\times 3} = \mathrm{M}(3,\mathbb{K})$ de poids égal à 1. On rappelle que le poids d'une matrice A est défini par $p(A) = \sum_{i,j} a_{ij}$.

a) Montrer qu'une matrice nilpotente est de trace nulle. On notera $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de trace nulle.
b) Montrer que le sous-espace affine engendré par les matrices nilpotentes de poids 1 est contenu dans un hyperplan affine de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{K})$.
c) Montrer que les matrices E_{ij}, pour $i \neq j \in [\![1;3]\!]$ et les deux matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

forment une famille de huit matrices affinement indépendantes.
Indication – Procéder étape par étape en montrant que la k-ème matrice est affinement indépendante des $k-1$ précédentes.
d) En déduire que le sous-espace affine engendré par les matrices nilpotentes de poids 1 est l'hyperplan affine de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ formé des matrices de poids 1. Il est de dimension $n^2 - 2$.

2) a) Montrer que le sous-espace affine engendré par les matrices nilpotentes est un sous-espace vectoriel. Déterminer alors ce sous-espace.
Indication – On commencera par remarquer que si une matrice est nilpotente, son opposée l'est aussi. On s'inspirera ensuite de la méthode de l'exercice précédent.
b) Quel est le sous-espace affine engendré par les matrice nilpotentes réelles d'indice de nilpotence n.
Indication – C'est encore un sous-espace vectoriel. On remarquera ensuite que toute matrice nilpotente est limite de matrices semblables au bloc de Jordan plein. On conclura en se rappelant qu'un sous-espace affine est fermé.
c) Quel est le sous-espace affine engendré par les matrices unipotentes ?
Indication – Il s'agit de l'hyperplan des matrices de trace égale à n.
d) Quel est le sous-espace affine engendré par les matrices unipotentes de poids 1 ?
Indication – On trouve le sous-espace affine de codimension 2 *formé des matrices de trace égale à n et de poids* 1*. Se ramener à déterminer les sous-espace affine engendré par les matrices nilpotentes de poids $1-n$ et imiter la méthode de l'exercice 1.*
e) Exhiber une famille de huit matrices de $\mathbb{K}^{3\times 3}$ unipotentes, de poids égal à 1 et qui soient affinement libres.

3) On se place dans le plan affine $\mathcal{E}_2$.
a) Montrer que toute application affine f qui laisse deux points A et B fixes laisse fixe toute la droite $\Delta = (AB)$, et conserve l'ensemble des droites parallèles à Δ.

b) Montrer que l'ensemble des droites parallèles à Δ est un espace affine (de dimension un) pointé en Δ, et que f y induit une application affine $\bar{f}$ ayant un point fixe.
c) Montrer que si f laisse stable une droite parallèle à Δ et qui en est distincte, elle laisse stable toutes les droites parallèles à Δ.
Indication – L'homothétie $\bar{f}$ ayant deux points fixes est égale à l'identité.
d) On suppose que le point $P \notin \Delta$ est appliqué par f en un point $P' \neq P$ tel que $\vec{PP'} \in \vec{\Delta}$. Ceci détermine uniquement l'application f. Montrer que la droite PP' est invariante par f, et que f y induit une translation.
e) Construire géométriquement l'image d'un point M quelconque du plan $\mathcal{E}_2$ par f.
f) Aborder à neuf l'exercice en montrant que si $ABCD$ est un trapèze, et si I est le milieu de AB, la droite passant par les points d'intersection de AD et CI d'une part, et de DI et BC d'autre part est parallèle à AB.
Indication – On évitera le théorème de Thalès, et on utilisera plutôt que la composée d'une homothétie et d'une translation est un homothétie, et qu'alors la droite des centres est orientée par le vecteur de la translation.

4) Soit un triangle ABM, dont les points A et B sont supposés fixes. On considère le symétrique M' de A par rapport à M.
a) Construire le triangle $AM''M'$ dont le barycentre est le point B.
b) Montrer que le milieu du segment $M'M''$ est indépendant de la position du point M dans le plan.
c) On reprend l'exercice en regardant M' et M'' comme images respectives de M par des homothéties de centres A et B. Quel est le milieu de ces deux homothéties, calculé dans l'espace affine des applications affines ? Retrouver le résultat de l'exercice.
d) Fabriquer un exercice analogue en prenant le milieu d'une translation et d'un demi-tour.

5) Théorème de Desargues
a) Soit f l'application affine qui applique le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$. On suppose que les droites AA', BB' et CC' sont parallèles à une direction D_0. Montrer que 1 est valeur propre de $\vec{f}$.
b) Montrer que l'application f est une transvection ou bien une affinité.
c) Montrer que les points d'intersection de AB et $A'B'$, de AC et $A'C'$ et enfin de BC et de $B'C'$ sont alignés sur une droite Δ.
Indication – Penser à composer deux homothéties bien choisies.
d) Montrer que f est une transvection ou une affinité suivant que la droite Δ est ou n'est pas parallèle à D_0.
d) On suppose maintenant que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes. Montrer que la conclusion du b) est encore valide.
Indication – On proposera trois méthodes, une par calcul barycentrique, une par un passage en géométrie de l'espace, et une avec un passage en projectif.