Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques

1 février 2002
B. Keller

DEUG MASS Première année : MT 131

Un corrigé de l'examen de Février 2002

Question de cours

1) Soient E un espace vectoriel réel et $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. Quand est-ce qu'on dit que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement indépendants ?
Réponse — Les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement indépendants si, quels que soient les nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0\ ,\ \ldots, \lambda_p = 0.$$

2) Soit u_n une suite de nombres réels et l un nombre réel. Que veut dire la phrase 'la suite u_n tend vers l' ?
Réponse — On dit que u_n tend vers l si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que l'on a, pour tout entier n,

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Exercices

I. Soit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$ en fonction du nombre réel λ et montrer que $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si λ est différent de 1 et -1.
Réponse — On a

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda-1)(1-\lambda^2) = (\lambda-1)(1-\lambda)(1+\lambda).$$

Cette expression s'annule si et seulement si λ vaut 1 ou -1. Or on sait qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Donc $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq \pm 1$.

2) On note $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ le noyau de la matrice $A - \lambda I_3$. Quelle est la dimension de E_λ en fonction du nombre réel λ ? Donner une base de E_λ à chaque fois qu'il n'est pas réduit à $\{0\}$.
Réponse — Pour $\lambda \neq \pm 1$, la matrice $A - \lambda I_3$ est inversible, donc son noyau E_λ est réduit à $\{0\}$. Pour $\lambda = -1$, il s'agit de donner une base du noyau de la matrice $A + I_3$. Nous effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces opérations laissent inchangé le noyau. La dernière matrice est clairement de rang 2. Donc son noyau est de dimension 1. Il admet le vecteur $v_1 = (2, 1, 1)$ pour base.

Pour $\lambda = 1$, il s'agit de déterminer le noyau de la matrice $A - I_3$. Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La dernière matrice est de clairement de rang 1. Donc son noyau est de dimension 2. Il a pour base $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.

3) Montrer que les sous-espaces E_1 et E_{-1} sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Réponse — Il suffit de montrer que la réunion des bases v_1 de E_{-1} et v_2, v_3 de E_1 est une base de $\mathbb{R}^3$. De façon équivalente, la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3 doit être de rang 3. Nous effectuons des opérations élémentaires sur les colonnes de cette matrice :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Clairement la dernière matrice est de rang 3. Comme les opérations élémentaires laissent inchangé le rang, la première l'est également.

4) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sur Ax est égale à la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}.

Réponse — Comme les sous-espaces E_1 et E_{-1} sont supplémentaires, la symétrie s est bien définie et c'est l'unique endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ tel que $s(v) = v$ et $s(w) = -w$ pour $v \in E_1$ et $w \in E_{-1}$. Or pour $v \in E_1$, nous avons $(A - I_3)v = 0$ donc $f(v) = v$ et pour $w \in E_{-1}$, nous avons $(A + I_3)w = 0$ donc $f(w) = -w$. Il s'ensuit que $f = s$.

II. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

1) Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $x \mapsto Ax$. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

Réponse — Pour déterminer une base du noyau de f, effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La dernière matrice est clairement de rang 2. Donc son noyau est de dimension $4-2 = 2$. Il admet les vecteurs $v_1 = (2, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0, 1)$ pour base.

Pour déterminer une base de l'image de A, effectuons des opérations élémentaires sur les colonnes de A :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La dernière matrice est de rang 2. Donc A est de rang 2. Son image admet pour base $w_1 = (1, 0, -1)$ et $w_2 = (0, 1, 1)$.

2) Donner une ou des équations caractérisant l'image de f dans $\mathbb{R}^3$.
Réponse — L'image de f est de dimension 2. Il s'agit donc d'un plan de $\mathbb{R}^3$, caractérisé par une seule équation. En examinant la base trouvée au point précédent, on voit que l'équation $x - y + z = 0$ convient.

3) Soit $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition le système d'équations $Ax = y$ possède-t-il une solution $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ dans $\mathbb{R}^4$? Pour ces vecteurs y, quelle est la solution générale du système ?
Réponse — Dire que le système $Ax = y$ possède une solution, c'est dire que y appartient à l'image de f. D'après le point précédent, c'est le cas si et seulement si l'on a $y_1 - y_2 + y_3 = 0$.
Un vecteur x est solution du système homogène $Ax = 0$ si et seulement si x appartient au noyau de f. Par 1), la solution générale du système homogène est donc

$$x_{hom} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer une solution particulière du système inhomogène, effectuons des opérations sur les lignes de la matrice agrandie

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & y_1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & y_2 \\ -2 & 3 & 1 & -4 & y_3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & y_1 + y_2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & y_3 + 2y_1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -y_1 - 2y_2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right]$$

En retraduisant dans le langage des systèmes d'équations, nous obtenons la solution particulière $x_{part} = (-y_1 - 2y_2, -y_1 - y_2, 0, 0)$. Donc la solution générale est

$$x_{gén} = x_{part} + x_{hom} = \begin{bmatrix} -y_1 - 2y_2 \\ -y_1 - y_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

III. Calculer la limite quand x tend vers 0 des fonctions suivantes

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{Log}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right), \qquad h(x) = (\cos(x))^{1/x^2}$$

Réponse — On a le développement limité

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x).$$

D'où le développement limité

$$\frac{sin(x)}{x} - 1 = -\frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon_1(x).$$

Par composition avec le développement limité $Log(1+x) = x - x^2/2 + x^2 \varepsilon_2(x)$ nous obtenons

$$Log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon_3(x).$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} Log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Nous avons

$$Log(h(x)) = \frac{1}{x^2} Log(\cos(x)).$$

Nous avons le développement limité

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x).$$

En le composant avec le développement limité

$$Log\,(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_2(u)$$

nous obtenons le développement limité

$$Log\,(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x).$$

Il s'ensuit que $Log\,(h(x))$ *tend vers* $-1/2$. *Comme la fonction exponentielle est continue, on trouve que* $h(x)$ *tend vers* $e^{-1/2}$.

IV. 1) Déterminer le développement limité de

$$f(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right).$$

à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Réponse — On a les développements limités

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x) \\ 1+\sin(x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

La division suivant les puissances croissantes nous donne le développement limité

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x).$$

respectivement le développement limité

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} - 1 = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x).$$

Nous le composons avec le d'eveloppement limité $Log\,(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 + u^3\varepsilon_4(u)$. *Si nous posons* $u = -x + x^2/2 - x^3/3$, *nous obtenons*

$$\begin{aligned} u &= -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ u^2 &= x^2 - x^3 + \textit{termes de degré} \geq 4 \\ u^3 &= -x^3 + \textit{termes de degré} \geq 4 \end{aligned}$$

Il vient que

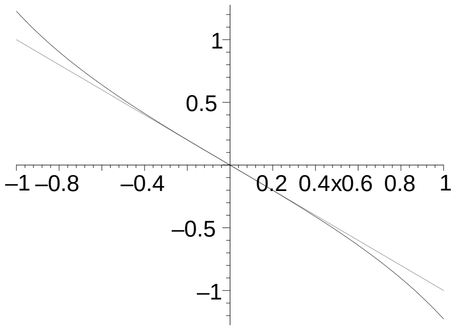
$$f(x) = Log\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right) = -x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

2) Quelle est la tangente en $(0,0)$ au graphe de la fonction f ? Quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente en $(0,0)$? Faire un dessin.

Réponse — Le développement

$$f(x) = Log\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right) = -x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

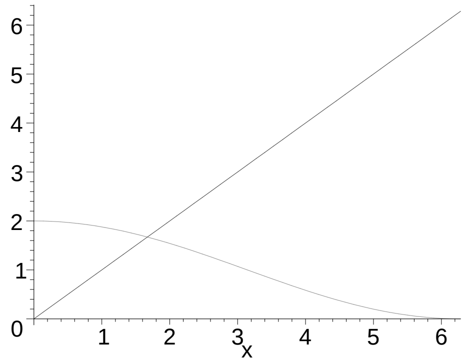
montre que la tangente en $(0,0)$ au graphe de f est la droite d'équation $y=-x$. Comme le premier terme non nul de degré >1 du développement est $-x^3/6$, le graphe va traverser sa tangente en $(0,0)$ (car l'exposant 3 est impair) en passant du dessus au dessous de la tangente (car le coefficient $-1/6$ est négatif).



V. 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = 1+\cos(x/2)$.

a) Esquisser le graphe de $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ et le graphe de $x \mapsto x$ dans un même dessin.

Réponse —



b) Montrer qu'il existe un nombre $l \in [0,2\pi]$ tel que $f(l)=l$. Indication : considérer la fonction

$$g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x - f(x).$$

Réponse — La fonction g est continue (elle est même dérivable). On a $g(0)=-2$ et $g(2\pi)=2\pi$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un nombre $l \in [0,2\pi]$ tel que $g(l)=0$. On a bien $l-f(l)=0$.

2) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment dérivable. Calculer sa dérivée et montrer que, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(b)-f(a)| \le \frac{1}{2}\,|b-a|\,.$$

Réponse — Les fonctions $x \mapsto x/2$ et $x \mapsto cos(x)$ sont continûment dérivables. Donc leur composée $x \mapsto \cos(x/2)$ est continûment dérivable. Donc f est continûment dérivable en tant que somme de fonctions continûment dérivables. Sa dérivée est

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,\sin(x/2).$$

Pour montrer l'inégalité, on peut supposer que $a<b$. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nous fournit un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$. Comme $|f'|$ est bornée par $1/2$, il s'ensuit que

$$|f(b)-f(a)| = |f'(c)(b-a)| = |f'(c)|\,|b-a| \le \frac{1}{2}\,|b-a|.$$

3) Soit u_0 un nombre réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = f(u_{n-1})$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
$$|u_n - l| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - l| \ .$$
Réponse — Comme $l = f(l)$ *et* $u_n = f(u_{n-1})$, *on a*
$$|u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \leq \frac{1}{2}\,|u_{n-1} - l|$$
d'après le point précédent.

4) Montrer que u_n tend vers l.
Réponse — Par récurrence, il résulte du point précédent que
$$|u_n - l| \leq \frac{1}{2^n}\,|u_0 - l|.$$
Cela montre bien que $|u_n - l|$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini. Donc* u_n *tend vers* l.