Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques

3 septembre 2002
B. Keller

DEUG MASS Première année : MT 131

Un corrigé de l'examen de Septembre 2002

Question de cours

1) Soient E un espace vectoriel réel et $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. Quand est-ce qu'on dit que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ forment une base de E ?

Réponse — Les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ forment une base de E s'ils sont linéairement indépendants et engendrent E. Ils sont linéairement indépendants si, quels que soient les nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \ , \ \ldots, \lambda_p = 0.$$

Ils engendrent E si, pour tout vecteur $v \in E$, il existe des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p.$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Que veut dire la phrase 'f est continue en $x_0 = 1$' ?

Réponse — On dit que f est continue en $x_0 = 1$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel qu'on ait

$$|x - 1| < \eta \quad \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

Exercices

I. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

1) Montrer qu'ils forment une base.

Réponse — Nous effectuons des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3 :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

La dernière matrice est triangulaire avec des coefficients non nuls sur la diagonale. Ses colonnes sont donc linéairement indépendantes. Donc les colonnes de la matrice de départ sont linéairement indépendantes. Comme elles sont au nombre de 3 dans un espace de dimension 3, elles en forment une base.

2) Soient x, y, z sont les coordonnées d'un vecteur u dans la base standard e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$ et x', y', z' ses coordonnées dans la base v_1, v_2, v_3. Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z.

Réponse — Soit S la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3.

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Nous avons

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

et donc

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Le calcul de l'inverse de la matrice S donne

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 3y + z \\ y' &= x + y \\ z' &= -2x - 4y + z \end{aligned}$$

3) Soit F la droite engendrée par v_1 et E le plan engendré par v_2 et v_3. Rappeler la définition de la symétrie $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par rapport à E parallèlement à F.
Réponse — La symétrie s est l'unique application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $s(v+w) = v - w$ pour tout $v \in E$ et tout $w \in F$.

4) Quelle est la matrice A' de s dans la base v_1, v_2, v_3 ?
Réponse — Comme $v_1 \in F$, nous avons $s(v_1) = -v_1$. Comme v_2 et v_3 appartiennent à E, nous avons $s(v_2) = v_2$ et $s(v_3) = v_3$. La matrice de s dans la base v_1, v_2, v_3 est donc

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5) Quelle est la matrice A de s dans la base standard e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$?
Réponse — Nous avons $A' = S^{-1}AS$ et

$$A = SA'S^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 4 & 7 & -2 \\ 8 & 12 & -3 \end{bmatrix}.$$

6) Rappeler la définition de la projection $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur E le long de F.
Réponse — La projection p est l'unique application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $p(v+w) = v$ pour tout $v \in E$ et tout $w \in F$.

7) Quelle est la matrice B' de p dans la base v_1, v_2, v_3 ? Comment exprimer B' à l'aide de A' et de la matrice identité I ?
Réponse — Nous avons $p(v_1) = 0$, $p(v_2) = v_2$ et $p(v_3) = v_3$. La matrice de p dans la base v_1, v_2, v_3 est donc

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous avons $A' + I = 2B'$ et donc $B' = (1/2)(A' + I)$.

8) Quelle est la matrice B de p dans la base e_1, e_2, e_3 ?
Réponse — Nous avons

$$B = S^{-1}B'S = S^{-1}(1/2)(A' + I)S = (1/2)(A + I) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

9) Soient a, b, c des réels. On considère le système d'équations

$$B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que ce système possède une solution et, dans ce cas, déterminer la solution générale.

Réponse — Comme B est la matrice de la projection sur E le long de F, l'image de B est E et le noyau de B est F. Le système possède donc une solution ssi le vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3$ appartient à E. C'est le cas ssi sa coordonnée $x' = -2a - 3b + z$ s'annule. Donc le système possède une solution ssi on a

$$-2a - 3b + z = 0$$

et dans ce cas, la solution générale est $u + tv_1$, $t \in \mathbb{R}$.

II. 1) Déterminer le développement limité de

$$f(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{1+x}{1+\sin(x)}\right).$$

à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Réponse — Nous avons

$$f(x) = Log(1+x) - Log(1+\sin(x)).$$

Nous avons les développements limités

$$\begin{aligned} Log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_1(x) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

En composant les développements, nous obtenons

$$\begin{aligned} Log(1+\sin(x)) &= (x - \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon_3(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon_4(x). \end{aligned}$$

Finalement, en formant la différence nous obtenons le développement

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + x^4\varepsilon_5(x).$$

2) Soit $g(x) = f(x) - x^3/6$. Quelle est la tangente en $(0,0)$ au graphe de la fonction g ? Quelle est la position du graphe de g par rapport à sa tangente en $(0,0)$?

Réponse — Nous avons

$$g(x) = -\frac{1}{6}x^4 + x^4\varepsilon_5(x).$$

La fonction $x \mapsto g(x)$ possède donc une tangente horizontale en $(0,0)$, qui, au voisinage de $(0,0)$, passe au-dessus du graphe de la fonction g.

III. 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Esquisser le graphe de $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ et le graphe de $x \mapsto x$ dans un même dessin.

Réponse —

b) Montrer qu'il existe un nombre $l \in [0, 2]$ tel que $f(l) = l$. Indication : considérer la fonction

$$g : [0, 2] \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto x - f(x).$$

Réponse — La fonction g est continue (elle est même dérivable). On a $g(0) = -1$ et $g(2) = 2 - e^{-4} > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un nombre $l \in [0, 2]$ tel que $g(l) = 0$. On a bien $l - f(l) = 0$.

2) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment dérivable. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est bornée par $\lambda = \sqrt{2/e}$. En déduire que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(b) - f(a)| \leq \lambda\, |b - a|\,.$$

Réponse — Les fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont continûment dérivables. Donc leur composée $x \mapsto e^{-x^2}$ est continûment dérivable. Donc f est continûment dérivable. Sa dérivée est

$$f'(x) = -2x\, e^{-x^2}.$$

Quand x tend vers $\pm\infty$, $f'(x)$ tend vers 0. Donc f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint son maximum et son minimum en un (ou plusieurs) points $x \in \mathbb{R}$ où la dérivée $f''(x)$ s'annule. Nous avons

$$f''(x) = -2\, e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}.$$

Nous voyons que f'' s'annule uniquement en $\pm\sqrt{1/2}$ et nous avons $|f'(\pm\sqrt{1/2})| = \sqrt{2/e}$. Pour montrer l'inégalité, on peut supposer que $a < b$. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nous fournit un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Comme $|f'|$ est bornée par λ, il s'ensuit que

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)(b - a)| = |f'(c)|\, |b - a| \leq \lambda\, |b - a|.$$

3) Soit u_0 un nombre réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = f(u_{n-1})$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n - l| \leq \lambda |u_{n-1} - l|\,.$$

Réponse — Comme $l = f(l)$ et $u_n = f(u_{n-1})$, on a

$$|u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \leq \lambda\, |u_{n-1} - l|$$

d'après le point précédent.

4) Montrer que u_n tend vers l.

Réponse — Par récurrence, il résulte du point précédent que

$$|u_n - l| \leq \lambda^n\, |u_0 - l|.$$

Comme $\lambda < 1$, cela montre bien que $|u_n - l|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers l.