

DEUG MASS Première année : MT 131

Un corrigé du Devoir 1

Question de cours

- 1) Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Qu'est-ce qu'un sous-espace vectoriel de E ?

Réponse — Un sous-espace vectoriel de E est une partie F de E telle que

- (1) le vecteur 0 appartient à F , et
- (2) pour tous vecteurs $v, w \in F$, le vecteur $v + w$ appartient encore à F , et
- (3) pour tout vecteur $v \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, le vecteur λv appartient encore à F .

- 2) Soient E et F des espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Qu'est-ce qu'une application linéaire de E dans F ?

Réponse — Une application linéaire de E dans F est une application f de E dans F telle que, pour tous vecteurs v, w de E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on ait

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \text{ et } f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

- 3) Soit f une application linéaire de E dans F . Rappeler la définition du noyau de f . Montrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel.

Réponse — Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs $v \in E$ tels que $f(v) = 0$. En particulier, comme on a $f(0) = 0$, le noyau de f contient le vecteur 0 . Si v et w appartiennent au noyau et λ est un scalaire, on a

$$f(v + w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0 \text{ et } f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda 0 = 0.$$

Donc $v + w$ et λv appartiennent encore au noyau. Donc le noyau est bien un sous-espace vectoriel.

- 4) Montrer que l'application linéaire f est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Réponse — Supposons que f est injective. Soit v un vecteur du noyau de f . On a donc $f(v) = 0 = f(0)$. Comme f est injective, on doit avoir $v = 0$. Donc le noyau de f est le sous-espace $\{0\}$. Réciproquement, supposons que le noyau de f s'annule. Soient v et w deux vecteurs de E tels que $f(v) = f(w)$. Alors $f(v - w) = f(v) - f(w) = 0$. Donc $v - w$ appartient au noyau de f . Comme le noyau est réduit à $\{0\}$, on doit avoir $v - w = 0$ et donc $v = w$. Donc f est injective.

Exercice I

Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et F la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, 1)$.

- 1) Montrer que E et F sont supplémentaires.

Réponse — Il s'agit de montrer que $E \cap F = \{0\}$ et que $E + F = \mathbb{R}^3$. Notons v le vecteur $(1, 2, 1)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, le vecteur tv appartient à E ssi $t + 2t + t = 0$ et c'est le cas ssi $t = 0$. Donc l'intersection de E et F est $\{0\}$. Pour montrer que $E + F = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que $\dim(E + F) = 3$. Or on sait que $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$. La dimension de l'intersection est nulle, la dimension de la droite F est 1 et la dimension de E est 2 (car E est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$). Donc $E + F$ est bien de dimension 3 et, par conséquent, égal à \mathbb{R}^3 .

- 2) Soit s la symétrie par rapport à E parallèlement à F . Choisir une base v_1, v_2 de E et une base v_3 de F . Déterminer la matrice de s dans la base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 . Est-ce qu'elle dépend du choix de v_1, v_2, v_3 ?

Réponse — On peut choisir $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -1)$. Ces deux vecteurs sont clairement linéairement indépendants. Comme E est de dimension 2, ils forment une base de E . Le vecteur $v_3 = (1, 2, 1)$ est clairement une base de F . Puisque E et F sont supplémentaires, la famille (v_1, v_2, v_3) est bien une base de \mathbb{R}^3 .

Par définition, on a $s(v + w) = v - w$ pour tout $v \in E$ et tout $w \in F$. En particulier, on a $s(v_1) = v_1$, $s(v_2) = v_2$ et $s(v_3) = -v_3$. La matrice de s dans la base v_1, v_2, v_3 est donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice ne dépend pas du choix de v_1, v_2, v_3 ; pour la calculer on a utilisé uniquement le fait que v_1 et v_2 forment une base de E et v_3 une base de F .

- 3) Déterminer la matrice de s dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Réponse — Dans le point précédent, nous avons calculé la matrice A' de s dans la nouvelle base (v_1, v_2, v_3) . Notons A la matrice de s dans l'ancienne base (e_1, e_2, e_3) et notons P la matrice de passage de l'ancienne vers la nouvelle base. Nous savons que

$$A' = P^{-1}AP.$$

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} nous obtenons que $A = PA'P^{-1}$. Il reste à calculer P , P^{-1} et le produit $PA'P^{-1}$. La matrice P a pour j -ième colonne les coordonnées du vecteur v_j dans la base (e_1, e_2, e_3) , pour tout j . Donc

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer l'inverse de P , nous effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice agrandie (bien sûr, le lecteur peut se servir d'une autre méthode s'il le souhaite)

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{T_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{T_{32}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{D_3(1/4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{T_{13}(-1)T_{23}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right] \end{array}$$

Nous avons donc

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Finalement, on trouve

$$A = P A' P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice II

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a+2 & 1 & a \\ a & a & -a \\ a-2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

en fonction du nombre réel a .

Réponse — On sait que les opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas le sous-espace engendré par les colonnes. En particulier, elles ne changent pas le rang. Commençons donc par simplifier la matrice donnée en effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a+2 & 1 & a \\ a & a & -a \\ a-2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{échange (1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & a+2 & a \\ a & a & -a \\ -1 & a-2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\cdot T_{12}(-a-2)T_{13}(-a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -a^2-a & -a^2-a \\ -1 & 2a & a+1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\cdot T_{23}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -a^2-a & 0 \\ -1 & 2a & -a+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notons A' la dernière matrice. Les coefficients diagonaux de cette matrice sont 1 , $-a(a+1)$, $(1-a)$. Si l'on a $a \notin \{-1, 0, 1\}$, alors les trois coefficients diagonaux sont non nuls. Comme la matrice est triangulaire, elle est donc de rang 3.

Si a prend respectivement les valeurs -1 , 0 et 1 , alors la matrice A' est égale, respectivement, à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans les trois cas, elle est de rang 2. Comme A et A' sont de même rang quel que soit a , on trouve finalement : la matrice A est de rang 2 si $a \in \{-1, 0, 1\}$ et de rang 3 sinon.

Exercice III

Soient les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = (1, 1, 0, 2), v_2 = (1, 2, 0, 3), v_3 = (1, 1, 1, 3), v_4 = (1, 1, 2, 4).$$

Soient F le sous-espace de \mathbb{R}^4 engendré par v_1 et v_2 et G le sous-espace engendré par v_3 et v_4 .

- 1) Montrer que F et G sont de dimension 2.

Réponse — Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels. Donc ils sont linéairement indépendants et forment une base du sous-espace F qu'ils engendrent. Donc F est bien de dimension 2. De même, les vecteurs v_3 et v_4 sont non proportionnels et G est de dimension 2.

- 2) Montrer que $F + G$ est de dimension 3. Que peut-on dire de la dimension de $F \cap G$?

Réponse — La somme $F + G$ est engendrée par les quatre vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 . On sait que le sous-espace engendré par les colonnes d'une matrice ne change pas lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur ces colonnes. Simplifions donc la famille de vecteurs v_1, \dots, v_4

en effectuant des opérations élémentaires sur la matrice dont ce sont les colonnes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\cdot T_{12}(-1)T_{13}(-1)T_{14}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\cdot T_{34}(-2)T_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les trois colonnes non nulles de la dernière matrice sont clairement linéairement indépendantes. Elle est donc de rang 3 et $F+G$, le sous-espace engendré par les colonnes, est de dimension 3. On sait qu'on a

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Donc $\dim(F \cap G) = 1$.

3) Exhiber une base de $F \cap G$ et des équations pour $F+G$.

Réponse — Commençons par chercher des équations pour $F+G$. Soient w_1, w_2, w_3 les colonnes non nulles de la dernière matrice du point précédent. On sait que $F+G$ est formé des combinaisons linéaires

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Clairement, un vecteur $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est de cette forme si et seulement si

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Ceci est donc l'équation recherchée pour $F+G$.

L'intersection $F \cap G$ est formée des vecteurs $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, qui s'écrivent aussi sous la forme $-\lambda_3 v_3 - \lambda_4 v_4$ pour des $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Nous allons donc résoudre le système homogène

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0.$$

On sait que l'ensemble des solutions du système homogène ne change pas lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de sa matrice. Simplifions donc le système par des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{T_{21}(-1)T_{41}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{T_{43}(-1)T_{13}(-1)T_{42}(-1)T_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'espace des solutions du système est donc de dimension 1 (on le savait déjà car $\dim F \cap G = 1$) et engendré par le vecteur $(1, 0, -2, 1)$. Donc l'intersection $F \cap G$ a pour base le vecteur

$$v_1 = 2v_3 - v_4.$$

Exercice IV

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales nulles ou de degré ≤ 6 . Soit f l'application linéaire de E dans E qui, à une fonction polynomiale $x \mapsto p(x)$, associe la fonction polynomiale $x \mapsto p(x+1)$.

- 1) Quelle est la matrice de A de f dans la base $1, x, \dots, x^6$?

Réponse — Notons p_0 la fonction polynomiale $x \mapsto 1$, p_1 la fonction polynomiale $x \mapsto x$, et, plus généralement, p_j la fonction polynomiale $x \mapsto x^j$, pour $0 \leq j \leq 6$. Pour tout $0 \leq j \leq 6$, l'application f envoie la fonction polynomiale p_j sur la fonction $x \mapsto (x+1)^j$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} (f(p_j))(x) &= 1 + C_j^1 x + C_j^2 x^2 + \dots + C_j^i x^i + \dots + x^j \\ &= p_0(x) + C_j^1 p_1(x) + C_j^2 p_2(x) + \dots + C_j^i p_i(x) + \dots + p_j(x). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$f(p_j) = p_0 + C_j^1 p_1 + \dots + C_j^i p_i + \dots + p_j + 0 p_{j+1} + \dots + 0 p_6.$$

En reportant ces coefficients dans la $(j+1)$ -ième colonne de la matrice nous obtenons

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 2) Soit n un entier. Calculer la puissance A^n . Indication : on pourra commencer par chercher l'application f^n .

Réponse — Si p est une fonction polynomiale, alors $f(p)$ est la fonction $x \mapsto p(x+1)$, donc $f(f(p))$ est la fonction $x \mapsto p((x+1)+1) = p(x+2)$.

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{Z}$, notons T_n l'application qui, à la fonction polynomiale $x \mapsto p(x)$, associe $x \mapsto p(x+n)$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrons par récurrence que $f^n = T_n$ pour tout $n \geq 1$. Nous savons déjà que $f = T_1$ et $f^2 = T_2$. Supposons que l'affirmation est vraie pour n et montrons-la pour $n+1$. En effet, nous avons

$$f^{n+1}(p) = f(f^n(p)) = f(x \mapsto p(x+n)) = (x \mapsto p((x+1)+n)) = (x \mapsto p(x+(n+1))) = (T_{n+1}(p))(x).$$

L'application T_0 est l'identité, donc $T_0 = f^0$. Pour $n \geq 0$, l'application T_{-n} est la réciproque de $T_n = f^n$. Donc nous avons bien $T_{-n} = (f^n)^{-1} = f^{-n}$. Nous obtenons finalement que $f^n = T_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Nous savons que la matrice A^n est la matrice de $f^n = T_n$. Pour calculer la matrice de T^n , nous utilisons le raisonnement du point précédent et l'identité

$$(n+x)^j = n^j + C_j^1 n^{j-1} x + C_j^2 n^{j-2} x^2 + \dots + C_j^i n^{j-i} x^i + \dots + x^j.$$

Nous obtenons la matrice

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 & n^4 & n^5 & n^6 \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 & 4n^3 & 5n^4 & 6n^5 \\ 0 & 0 & 1 & 3n & 6n^2 & 10n^3 & 15n^4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4n & 10n^2 & 20n^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5n & 15n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice V (facultatif)

On définit la suite de Fibonacci par

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

- 1) Calculer a_0, \dots, a_{10} .

Réponse — On trouve le tableau

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

- 2) Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Réponse — Procédons par récurrence sur n . L'affirmation est visiblement vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour n et montrons-la pour $n + 1$. Nous avons

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n-1} + a_n & a_n + a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{bmatrix}.$$

ce qui montre l'affirmation.

- 3) Calculer la valeur exacte de A^{128} et de a_{128} . Indication : le calcul peut se faire par 7 multiplications de matrices.

Réponse — Nous avons $A^{128} = (A^{64})^2$ et $A^{64} = (A^{32})^2, \dots, A^4 = (A^2)^2$. Nous obtenons¹

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A^4 = A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, A^8 = A^4 A^4 = \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{bmatrix} \\ A^{16} &= (A^8)^2 = \begin{bmatrix} 610 & 987 \\ 987 & 1597 \end{bmatrix}, A^{32} = (A^{16})^2 = \begin{bmatrix} 1346269 & 2179309 \\ 2179309 & 3424578 \end{bmatrix}, \\ A^{64} &= \begin{bmatrix} 6557470319842 & 10510209857723 \\ 10510209857723 & 17167680177565 \end{bmatrix}, \\ A^{128} &= \begin{bmatrix} 155576970220531065681649693 & 251728825683549488150424261 \\ 251728825683549488150424261 & 407305795904080553832073954 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- 4) Un nombre entier a est divisible par un nombre entier b s'il existe un nombre entier c tel que $a = bc$. Soient $n, k \geq 1$ et B une matrice 2×2 à coefficients entiers. Montrer, par récurrence sur $k \geq 1$, que le coefficient $(2, 1)$ de la matrice B^k est divisible par le coefficient $(2, 1)$ de B .

Réponse — Clairement l'affirmation est vraie pour $k = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour k et montrons-la pour $k + 1$. Notons c_{ij} les coefficients de la matrice B^k . Nous avons

$$B^{k+1} = BB^k = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Le coefficient $(2, 1)$ de la matrice B^{k+1} est donc égal à $b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}$. Par l'hypothèse de récurrence, nous avons $c_{21} = b_{21}d$ pour un entier d . Donc le coefficient $(2, 1)$ de B^{k+1} est

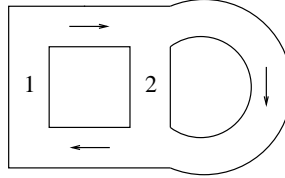
$$b_{21}c_{11} + b_{22}b_{21}d = b_{21}(c_{11} + db_{22}).$$

¹en nous servant d'un logiciel de calcul formel

- 5) Dédurre que a_{kn} est divisible par a_n pour tout $k \geq 1$.

Réponse — L'entier a_{kn} est le coefficient $(2,1)$ de la matrice $A^{kn} = (A^n)^k$. D'après le point précédent, a_{kn} est bien divisible par le coefficient $(2,1)$ de la matrice A^n , qui n'est autre que a_n .

- 6) Montrer que a_n est le nombre de trajets de longueur n qui, dans le labyrinthe à sens uniques ci-dessous, mènent de 1 à 2. Indication : Soit $B(n)$ la matrice 2×2 dont le coefficient $b(n)_{ij}$ est le nombre de chemins de i à j de longueur n . On pourra montrer que $B(n) = A^n$.



Réponse — Nous avons $B(1) = A$ et il est immédiat de voir que le coefficient (i,j) de A est le nombre de chemins de longueur 1 de i à j dans le labyrinthe. Supposons l'affirmation vraie pour n et montrons-la pour $n+1$. Tout chemin de longueur $n+1$ de i vers j est composé d'un chemin de longueur n vers un sommet k et d'un chemin de longueur 1 de k vers j . Pour k , il n'y a que deux possibilités, à savoir 1 ou 2. Ainsi le nombre de chemins de longueur $n+1$ allant de i à j est

$$b(n)_{i1}a_{1j} + b(n)_{i2}a_{2j}.$$

Ceci est exactement le coefficient (i,j) de la matrice $B(n)A$. Donc on a bien

$$B(n+1) = B(n)A = A^n A = A^{n+1}.$$