Université Paris 7 — 1 décembre 2001
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

DEUG MASS Première année : MT 131

Un corrigé de l'examen partiel

Question de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1) Qu'est-ce qu'une base de E ?
Réponse — Une base de E est une suite de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de E qui est génératrice (i.e. tout vecteur est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$) et libre (i.e. si l'on a
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$
pour des scalaires λ_i, alors on a $\lambda_i = 0$ pour tout i).

2) Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E et v un vecteur de E. Qu'est-ce qu'on entend par les coordonnées de v dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$?
Réponse — Les coordonnées de v sont les scalaires $x_1, \ldots, x_n$, déterminés uniquement par v, tels que
$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n.$$

3) Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E, v un vecteur et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de v dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$. Supposons que $x_1 \neq 0$. Montrer que $(v, v_2, \ldots, v_n)$ est encore une base de E.
Réponse — Comme $x_1 \neq 0$, nous avons
$$v_1 = \frac{1}{x_1}(v - x_2 v_2 - \ldots - x_n v_n).$$
Il s'ensuit que toute combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est aussi une combinaison linéaire de $v, v_2, \ldots, v_n$. La famille $(v, v_2, \ldots, v_n)$ est donc génératrice. Comme elle est formée de n vecteurs et que E est de dimension n, elle est une base.

Exercice I

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$, soit F le sous-espace des solutions du système
$$x_1 - x_4 = 0$$
$$x_2 + x_4 = 0$$
et G le sous-espace des solutions du système
$$x_1 + x_4 = 0$$
$$x_3 - x_4 = 0$$

1) Montrer que F et G sont de dimension 2. Montrer que leur intersection est réduite à $\{0\}$ et en déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
Réponse — Les deux équations qui définissent F sont clairement linéairement indépendantes. Donc F est de dimension $\dim \mathbb{R}^4 - 2 = 2$. De même pour G.
Un vecteur x qui appartient à l'intersection de F et G est solution du système formé des quatre équations ci-dessus. Si nous rajoutons la première équation à la troisième, nous obtenons $2x_1 = 0$. La première donne alors $x_4 = 0$, et les deux dernières donnent $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$. Donc $x = 0$ et l'intersection $F \cap G$ est bien réduite à $\{0\}$.
On sait que la dimension de $F+G$ est égale à $\dim F + \dim G - \dim F \cap G$. Comme $F \cap G = \{0\}$, le sous-espace $F + G \subset \mathbb{R}^4$ est donc de dimension 4. Donc il est égal à $\mathbb{R}^4$. Ainsi nous avons $F + G = \mathbb{R}^4$ et $F \cap G = \{0\}$ ce qui signifie que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

2) Exhiber une base v_1, v_2 de F et une base v_3, v_4 de G.
Réponse — Les vecteurs suivants

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

sont clairement linéairement indépendants et appartiennent à F. Comme F est de dimension 2, ils forment une base de F. Les vecteurs

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

sont clairement linéairement indépendants et appartiennent à G. Comme G est de dimension 2, ils forment une base de G.

3) Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
a) Quelle est la matrice de s dans la base $(v_1, \dots, v_4)$?
b) Quelle est la matrice de s dans la base canonique $(e_1, \dots, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$?
Réponse — a) Par définition de s, nous avons

$$s(v_1) = v_1 \ , \ s(v_2) = v_2 \ , \ s(v_3) = -v_3 \ , \ s(v_4) = -v_4.$$

La matrice de s dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) est donc

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Notons A la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Nous savons que $A' = P^{-1}AP$, où P est la matrice du changement de base de (e_1, e_2, e_3, e_4) vers (v_1, v_2, v_3, v_4). Il s'ensuit que $A = PA'P^{-1}$. La matrice P et son inverse sont

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

On trouve

$$A = PA'P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice II

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 13 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1) Quels sont les vecteurs $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ de $\mathbb{R}^4$ tels que le système $Ax = y$ admet une solution $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ dans $\mathbb{R}^5$? Dans ce cas, quelle est la solution générale du système $Ax = y$?

Réponse — Nous effectuons des opérations élémentaires sur les équations du système $Ax = y$. De façon équivalente, nous effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 0 & 5 & y_1 \\ 1 & 2 & 13 & 0 & 7 & y_2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 4 & y_3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 4 & y_4 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 3 & -y_2 + 2\,y_1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -y_2 + y_4 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,y_1 - 2\,y_2 + y_4 \end{bmatrix}.$$

Le système $Ax = y$ est donc équivalent au système

$$\begin{array}{cccccl} x_1 & & +5x_3 & & +3x_5 & = -y_2 + 2y_1 \\ & x_2 & +4x_3 & & +2x_5 & = -y_1 + y_2 \\ & & & x_4 & +x_5 & = -y_2 + y_4 + y_3 \\ & & & & 0 & = 2y_1 - 2y_2 + y_4 \end{array}$$

Ce dernier système admet une solution x si et seulement si la quatrième équation est vérifiée. Supposons que c'est le cas. Alors le système admet pour solution particulière

$$x_{part} = \begin{bmatrix} -y_2 + 2y_1 \\ -y_1 + y_2 \\ 0 \\ -y_2 + y_4 + y_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le système homogène associé est

$$\begin{array}{cccccl} x_1 & & +5x_3 & & +3x_5 & = 0 \\ & x_2 & +4x_3 & & +2x_5 & = 0 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 0 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}$$

Un vecteur $x \in \mathbb{R}^5$ est solution de ce système si et seulement si

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_3 - 3x_5 \\ -4x_3 - 2x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

La solution générale du système homogène est donc

$$x_{hom} = \begin{bmatrix} -5s - 3t \\ -4s - 2t \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

La solution générale du système inhomogène est

$$x_{gén} = x_{part} + x_{hom} = \begin{bmatrix} -y_2 + 2y_1 \\ -y_1 + y_2 \\ 0 \\ -y_2 + y_4 + y_3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

2) Soit $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire qui, à $x \in \mathbb{R}^5$, associe Ax.

a) Donner une base du noyau de f.

Réponse — Un vecteur x appartient au noyau de f si et seulement si il est solution du système homogène $Ax = 0$. D'après le point précédent, il est alors combinaison linéaire des vecteurs

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ces vecteurs forment donc une famille génératrice du noyau. Comme ils sont linéairement indépendants (car non proportionnels), ils en forment même une base.

b) Donner une ou des équations qui caractérisent l'image de f. Quelle est la dimension de l'image ?

Réponse — Un vecteur $y \in \mathbb{R}^4$ appartient à l'image de f si et seulement si le système $Ax = y$ admet une solution x. Nous avons vu au point 1) que c'est le cas si et seuelement si l'on a

$$2y_1 - 2y_2 + y_4 = 0.$$

Cette équation caractérise donc les vecteurs y de l'image de f. L'image est de dimension 3 car elle est l'ensemble des solutions d'une équation non triviale en 4 inconnues (voici une autre raison : le noyau de f est de dimension 2 donc l'image de dimension $(\dim \mathbb{R}^5) - 2 = 3$).

3) Soit $F \subset \mathbb{R}^4$ l'image de f. Donner une base de F. Existe-t-il une application linéaire $g : F \to \mathbb{R}^5$ telle que $f \circ g$ est l'identité de F ? Justifier.

Réponse — D'après l'équation pour l'image de f, les vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

appartiennent à l'image. Ils sont clairement linéairement indépendants. Comme l'image est de dimension 3, ils en forment une base.

Comme les vecteurs v_i appartiennent à l'image de f, il existe des vecteurs w_i de $\mathbb{R}^5$ tels que $f(w_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$. Comme les v_i forment une base de F, il existe une unique application linéaire $g : F \to \mathbb{R}^5$ telle que $g(v_i) = w_i$. Montrons que l'application $f \circ g$ est égale à l'application id_F. Comme ces deux applications sont lináires, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur les vecteurs de la base v_1, v_2, v_3. En effet, nous avons $(f \circ g)(v_i) = f(w_i) = v_i = id_F(v_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Exercice III

Soient x_1, x_2, x_3 des nombres réels et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Nous allons calculer le déterminant de A.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont nulles ou de degré ≤ 2. Dans E, on choisit la base formée des fonctions p_1, p_2, p_3 qui, à $x \in \mathbb{R}$, associent respectivement $1, x$ et x^2. Dans $\mathbb{R}^3$, on choisit la base canonique (e_1, e_2, e_3).

Soit $f : E \to \mathbb{R}^3$ l'application qui, à $p \in E$, associe $(p(x_1), p(x_2), p(x_3))$.

1) Montrer que f est linéaire et que A est sa matrice dans les bases choisies de E et $\mathbb{R}^3$.
Réponse — On sait qu'une application $f : E \to \mathbb{R}^3$ est linéaire si et seulement si ses composantes f_i, définies par $f(v) = (f_1(v), f_2(v), f_3(v))$ sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Il suffit donc de vérifier que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui, à une fonction polynomiale p associe $p(x_i)$, est linéaire. En effet, si p et q sont deux fonctions polynomiales et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons
$$(p+q)(x_i) = p(x_i) + q(x_i) \text{ et } (\lambda p)(x_i) = \lambda p(x_i).$$
Pour déterminer la matrice de f, calculons les images des vecteurs de la base p_1, p_2, p_3. Nous avons $f(p_1) = (1, 1, 1)$, $f(p_2) = (x_1, x_2, x_3)$ et $f(p_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$. Si nous écrivons les coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, nous obtenons bien les colonnes de la matrice A. Donc A est bien la matrice de f dans les bases choisies.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$q_1(x) = 1\ ,\ q_2(x) = (x - x_1)\ ,\ q_3(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$
Soit $g : \mathbb{R}^3 \to E$ l'application linéaire qui envoie e_j sur q_j, $1 \leq j \leq 3$. Soit B la matrice de g dans les bases choisies. Montrer que B est triangulaire supérieure et calculer son déterminant.
Réponse — Nous avons
$$g(e_1) = p_1\ ,\ g(e_2) = q_2 = p_2 - x_1 p_1\ ,\ g(e_3) = q_3 = p_3 - (x_1 + x_2)p_2 + (x_1 x_2)p_1.$$
La matrice B est donc
$$\begin{bmatrix} 1 & -x_1 & x_1 x_2 \\ 0 & 1 & -(x_1 + x_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Elle est bien triangulaire supérieure. Son déterminant est donc le produit de ses coefficients diagonaux. Dont $\det B = 1$.

3) Soit $C = (c_{ij})$ la matrice de $f \circ g$ dans les bases choisies. Calculer $(f \circ g)(e_j)$ pour $1 \leq j \leq 3$ et en déduire que $c_{ij} = q_j(x_i)$. Observer que C est triangulaire inférieure et calculer son déterminant.
Réponse — Nous avons
$$(f \circ g)(e_j) = f(q_j) = \begin{bmatrix} q_j(x_1) \\ q_j(x_2) \\ q_j(x_3) \end{bmatrix} = q_j(x_1)e_1 + q_j(x_2)e_2 + q_j(x_3)e_3.$$
Le coefficient (i, j) de C est donc bien $q_j(x_i)$. Comme q_2 s'annule en x_1 et q_3 s'annule en x_1 et x_2, la matrice C est
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & q_2(x_2) & 0 \\ 1 & q_2(x_3) & q_3(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_2 - x_1) & 0 \\ 1 & q_2(x_3) & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{bmatrix}.$$
Comme C est triangulaire inférieure, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux. Donc
$$\det C = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

4) Calculer le déterminant de A en utilisant le fait que $C = AB$.
Réponse — L'égalité $C = AB$ nous donne
$$\det C = \det(AB) = (\det A)(\det B).$$
Comme $\det B = 1$, nous obtenons
$$\det A = \det C = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$