Université Paris 7 — 6 novembre 2001
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

DEUG MASS Première année : MT 131

Devoir
(à rendre la semaine du 19 novembre en TD)

Question de cours

1) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Qu'est-ce qu'un sous-espace vectoriel de E ?
2) Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Qu'est-ce qu'une application linéaire de E dans F ?
3) Soit f une application linéaire de E dans F. Rappeler la définition du noyau de f. Montrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel.
4) Montrer que l'application linéaire f est injective si et seulement si son noyau s'annule.

Exercice I

Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et F la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, 1)$.

1) Montrer que E et F sont supplémentaires.
2) Soit s la symétrie par rapport à E parallèlement à F. Choisir une base v_1, v_2 de E et une base v_3 de F. Déterminer la matrice de s dans la base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$. Est-ce qu'elle dépend du choix de v_1, v_2, v_3 ?
3) Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice II

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a+2 & 1 & a \\ a & a & -a \\ a-2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

en fonction du nombre réel a.

Exercice III

Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 1, 0, 2)\ ,\ v_2 = (1, 2, 0, 3)\ ,\ v_3 = (1, 1, 1, 3)\ ,\ v_4 = (1, 1, 2, 4).$$

Soient F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1 et v_2 et G le sous-espace engendré par v_3 et v_4.

1) Montrer que F et G sont de dimension 2.
2) Montrer que $F + G$ est de dimension 3. Que peut-on dire de la dimension de $F \cap G$?
3) Exhiber une base de $F \cap G$ et des équations pour $F + G$.

Exercice IV

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales nulles ou de degré ≤ 6. Soit f l'application linéaire de E dans E qui, à un polynôme $x \mapsto p(x)$, associe le polynôme $x \mapsto p(x + 1)$.

1) Quelle est la matrice de A de f dans la base $1, x, \dots, x^6$?
2) Soit n un entier. Calculer la puissance A^n. Indication : on pourra commencer par chercher l'application f^n.

Exercice V (facultatif)

On définit la suite de Fibonacci par

$$a_0 = 0\ ,\ a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

1) Calculer $a_0, \dots, a_{10}$.
2) Soit la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
$$A^n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{bmatrix}.$$
3) Calculer la valeur exacte de A^{128} et de a_{128}. Indication : le calcul peut se faire par 7 multiplications de matrices.
4) Un nombre entier a est *divisible* par un nombre entier b s'il existe un nombre entier c tel que $a = bc$. Soient $n, k \geq 1$ et B une matrice 2×2 à coefficients entiers. Montrer, par récurrence sur $k \geq 1$, que le coefficient $(2, 1)$ de la matrice B^k est divisible par le co est divisible par le coefficient $(2, 1)$ de B.
5) Déduire que a_{kn} est divisible par a_n pour tous $k \geq 1$.
6) Montrer que a_n est le nombre de trajets de longueur n qui, dans le labyrinth à sens uniques ci-dessous, mènent de 1 à 2. Indication : Soit $B(n)$ la matrice 2×2 dont le coefficient $b(n)_{ij}$ est le nombre de chemins de i à j de longueur n. On pourra montrer que $B(n) = A^n$.