Université Paris 7 1 février 2002
U.F.R. de Mathématiques B. Keller

DEUG MASS Première année : MT 131

Examen de Février 2002

Question de cours

1) Soient E un espace vectoriel réel et $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. Quand est-ce qu'on dit que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement indépendants ?
2) Soit u_n une suite de nombres réels et l un nombre réel. Que veut dire la phrase 'la suite u_n tend vers l' ?

Exercices

I. Soit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$ en fonction du nombre réel λ et montrer que $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si λ est différent de 1 et -1.
2) On note $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ le noyau de la matrice $A - \lambda I_3$. Quelle est la dimension de E_λ en fonction du nombre réel λ ? Donner une base de E_λ à chaque fois qu'il n'est pas réduit à $\{0\}$.
3) Montrer que les sous-espaces E_1 et E_{-1} sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sur Ax est égale à la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}.

II. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

1) Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $x \mapsto Ax$. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.
2) Donner une ou des équations caractérisant l'image de f dans $\mathbb{R}^3$.
3) Soit $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition le système d'équations $Ax = y$ possède-t-il une solution $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ dans $\mathbb{R}^4$? Pour ces vecteurs y, quelle est la solution générale du système ?

III. Calculer la limite quand x tend vers 0 des fonctions suivantes

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{Log}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) , \quad h(x) = (\cos(x))^{1/x^2}$$

IV. 1) Déterminer le développement limité de

$$f(x) = \operatorname{Log}\left(\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}\right).$$

à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2) Quelle est la tangente en $(0, 0)$ au graphe de la fonction f ? Quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente en $(0, 0)$? Faire un dessin.

V. 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = 1 + \cos(x/2)$.

a) Esquisser le graphe de $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ et le graphe de $x \mapsto x$ dans un même dessin.

b) Montrer qu'il existe un nombre $l \in [0, 2\pi]$ tel que $f(l) = l$. Indication : considérer la fonction

$$g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x - f(x).$$

2) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment dérivable. Calculer sa dérivée et montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}\,|b - a|\ .$$

3) Soit u_0 un nombre réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = f(u_{n-1})$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n - l| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - l|\ .$$

4) Montrer que u_n tend vers l.