Université Paris 7 — 3 septembre 2002
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

DEUG MASS Première année : MT 131

Examen de Septembre 2002

Question de cours

1) Soient E un espace vectoriel réel et $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E. Quand est-ce qu'on dit que les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ forment une base de E ?
2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Que veut dire la phrase 'f est continue en $x_0 = 1$' ?

Exercices

I. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

1) Montrer qu'ils forment une base.
2) Soient x, y, z sont les coordonnées d'un vecteur u dans la base standard e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$ et x', y', z' ses coordonnées dans la base v_1, v_2, v_3. Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z.
3) Soit F la droite engendrée par v_1 et E le plan engendré par v_2 et v_3. Rappeler la définition de la symétrie $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par rapport à E parallèlement à F.
4) Quelle est la matrice A' de s dans la base v_1, v_2, v_3 ?
5) Quelle est la matrice A de s dans la base standard e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$?
6) Rappeler la définition de la projection $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur E le long de F.
7) Quelle est la matrice B' de p dans la base v_1, v_2, v_3 ? Comment exprimer B' à l'aide de A' et de la matrice identité I ?
8) Quelle est la matrice B de p dans la base e_1, e_2, e_3 ?
9) Soient a, b, c des réels. On considère le système d'équations

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} .$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que ce système possède une solution et, dans ce cas, déterminer la solution générale.

II. 1) Déterminer le développement limité de

$$f(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{1+x}{1+\sin(x)}\right).$$

à l'ordre 4 au voisinage de 0.

2) Soit $g(x) = f(x) - x^3/6$. Quelle est la tangente en $(0,0)$ au graphe de la fonction g ? Quelle est la position du graphe de g par rapport à sa tangente en $(0,0)$?

III. 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Esquisser le graphe de $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ et le graphe de $x \mapsto x$ dans un même dessin.

b) Montrer qu'il existe un nombre $l \in [0, 2]$ tel que $f(l) = l$. Indication : considérer la fonction

$$g : [0, 2] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x - f(x).$$

2) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment dérivable. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est bornée par $\lambda = \sqrt{2/e}$. En déduire que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(b) - f(a)| \leq \lambda\, |b - a|\ .$$

3) Soit u_0 un nombre réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = f(u_{n-1})$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n - l| \leq \lambda |u_{n-1} - l|\ .$$

4) Montrer que u_n tend vers l.