Université Paris 7 — 10 novembre 2001
U.F.R. de Mathématiques — B. Keller

DEUG MASS Première année : MT 131

Exemples d'utilisation des opérations élémentaires

Unicité de la matrice strictement en échelons

1. Recherche d'un noyau

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 10 & 0 & 2 & 7 & 12 \end{bmatrix} .$$

On cherche l'espace des solutions du système homogène

$$Ax = 0 \, , \; x \in \mathbb{K}^9 \, ,$$

c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire f_A qui, à $x \in \mathbb{R}^9$, associe $Ax \in \mathbb{R}^4$. On sait que cet espace reste inchangé lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A (ou, de façon équivalente, sur les équations du système). Simplifions donc A par des opérations élémentaires sur les lignes. Plus précisément, nous souhaitons réduire A à une matrice en échelons (par rapport au lignes). Notre premier but est de produire un coefficient 1 en haut de la première colonne non nulle. Nous y parvenons en échangeant les première et deuxième lignes. Si nous désignons par $E(1,2)$ le produit de matrices élémentaires qui correspond à cette opération, nous obtenons la matrice

$$A_1 = E(1,2)A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 10 & 0 & 2 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Maintenant nous produisons des 0 en dessous du coefficient 1 en haut de la deuxième colonne en ajoutant 1 fois la première ligne à la troisième et -2 fois la première à la quatrième. Nous obtenons la matrice

$$A_2 = T_{41}(-2)T_{31}(1)A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Un premier échelon est apparu à la première ligne. Considérons maintenant la sous-matrice obtenue en supprimant la première ligne. Sa première colonne non nulle contient déjà un coefficient 1 à la première ligne (de la sous-matrice, bien entendu). Nous produisons des coefficients 0 au-dessous de 1 en ajoutant des multiples convenables de la deuxième ligne (de la grande matrice) aux troisième et quatrième lignes :

$$A_3 = T_{42}(1)T_{32}(-1)A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalement, nous considérons la sous-matrice obtenue en supprimant les deux premières lignes. Sa première colonne non nulle a déjà un coefficient 1 à la première ligne (de la sous-matrice). Nous obtenons un coefficient 0 en bas du 1 en ajoutant -1 fois la troisième ligne (de la grande matrice) à la quatrième :

$$A_4 = T_{43}(-1)A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous avons obtenu une matrice en échelons (par rapport aux lignes). Elle comporte trois lignes non nulles et elle est donc de rang 3. Par le thèorème de la dimension, le noyau de $f_A : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^4$ est donc de dimension $9 - 3 = 6$.

Le système $Ax = 0$ est équivalent au système $A_4x = 0$ et ce dernier est facile à résoudre. Nous préférons néanmoins effectuer encore quelques opérations pour arriver à *l'unique matrice strictement en échelons* par rapport aux lignes obtenue à partir de A par des opérations élémentaires. Pour cela, nous ajoutons d'abord -1 fois la troisième ligne aux deuxième et premières lignes pour arriver à

$$A_5 = T_{13}(-1)T_{23}(-1)A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement, nous ajoutons -1 fois la deuxième à la première ligne pour obtenir

$$A_6 = T_{21}(-1)A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est bien strictement en échelons par rapport aux lignes. Le système associé est

$$\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_5 - x_6 + x_8 + 2\,x_9 &= 0 \\ x_4 + 4\,x_5 + 2\,x_6 + x_8 + 2\,x_9 &= 0 \\ x_7 + 2\,x_8 + 3\,x_9 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées x_4, x_4 et x_7 s'expriment facilement en fonction des six autres : un vecteur $x \in \mathbb{R}^9$ est solution si et seulement si on a

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & = x_1 & & & & & \\ x_2 & = & -2x_3 & -3x_5 & +x_6 & -x_8 & -2x_9 \\ x_3 & = & x_3 & & & & \\ x_4 & = & & -4x_5 & -2x_6 & +x_8 & +2x_9 \\ x_5 & = & & x_5 & & & \\ x_6 & = & & & x_6 & & \\ x_7 & = & & & & -2x_8 & +3x_9 \\ x_8 & = & & & & x_8 & \\ x_9 & = & & & & & x_9 \end{array}$$

où les six coordonnées autres que x_2, x_4 et x_7 sont des réels quelconques. Le noyau de f_A admet donc pour base les colonnes de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Recherche d'une image

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Nous allons étudier le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par les colonnes de A c'est-à-dire l'image de l'application linéaire f_A qui, à $x \in \mathbb{R}^4$ associe $Ax \in \mathbb{R}^5$ (on cherche sa dimension, une base, des équations). On sait que cet espace ne change pas lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice. Simplifions donc A par des opérations élémentaires sur les colonnes. Plus précisément, nous souhaitons réduire A à une matrice en échelons par rapport aux colonnes. Pour obtenir un coefficient 1 au début de la première ligne non nulle (qui, ici, est la première ligne de la matrice), nous échangeons les colonnes 1 et 3. Nous obtenons la matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 0 & 10 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Maintenant on produit des coefficients nuls à droite de 1 par des opérations convenables :

$$A_2 = A_1 T_{12}(1) T_{14}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Un premier échelon apparaît. Nous continuons à simplifier la matrice :

$$A_3 = A_2 T_{23}(1) T_{24}(2) D_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice obtenue est en échelons par rapport aux colonnes. Elle a trois colonnes non nulles donc A_3 et A sont de rang 3. Simplifions encore la matrice pour arriver à l'unique matrice strictement en échelons par rapport aux colonnes obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les colonnes.

$$A_4 = A_3 T_{32}(1) T_{21}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La dernière matrice est bien strictement en échelons par rapport aux colonnes. Ses colonnes forment une base de l'image de f_A. Les vecteurs de l'image sont donc de la forme

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5\,x_1 \\ x_2 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des réels quelconques. Un vecteur y appartient donc à l'image si et seulement si

$$\begin{aligned} 5y_1 - y_2 &= 0 \\ 3y_1 + 4y_2 - y_4 &= 0\ . \end{aligned}$$

Nous avons ainsi trouvé un système d'équations pour l'image. Notons que nous avons deux équations linéairement indépendantes en 5 inconnues ce qui nous donne bien un espace de solutions de dimension $5 - 2 = 3$.

3. Démonstration de l'unicité de la matrice strictement en échelons

Soit A une matrice $p \times n$ et P une matrice inversible $n \times n$ telle que $A' = PA$ est strictement en échelons par rapport aux lignes. Nous allons montrer que la matrice A' est uniquement déterminée par A.

Soit r le rang de A. Nous pouvons supposer que $r > 0$ (sinon A et A' sont nulles). Soient $j_1, j_2, \ldots, j_r$ les numéros des colonnes de A' où l'échelon monte. On a donc $A'e_{j_1} = e_1, \ldots, A'e_{j_r} = e_r$. Montrons que les nombres $j_1, \ldots, j_r$ ne dépendent que de A. Pour $1 \leq j \leq p$, soit F_j le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par $Ae_1, \ldots, Ae_j$ et F'_j le sous-espace engendré par $A'e_1, \ldots, A'e_j$. L'application $v \mapsto Pv$ donne un isomorphisme de F_j sur F'_j. Donc $\dim F_j = \dim F'_j$ pour tout j. Ces dimensions déterminent les nombres $j_1, \ldots, j_r$. En effet, posons $\delta(0) = 0$ et $\delta(j) = \dim F'_j$ pour $1 \leq j \leq p$. Alors la fonction δ est croissante, on a $\delta(j+1) \leq \delta(j)+1$ et on a $\delta(j+1) = \delta(j)+1$ exactement si j est l'un des nombres j_k.

Maintenant soit $1 \leq j \leq p$ distinct des $j_1, \ldots, j_k$. Montrons que les coefficients de la colonne $A'e_j$ de A' ne dépendent que de A. On a $A'e_j = 0$ si et seulement si $Ae_j = 0$ donc l'affirmation est claire dans ce cas. Supposons donc que $A'e_j$ est non nul. Nous avons

$$A'e_j = a'_{1j}e_1 + a'_{2j}e_2 + \ldots + a'_{kj}e_k$$

pour un $k \geq 1$ et nous pouvons récrire cette égalié sous la forme

$$A'e_j = a'_{1j}A'e_{j_1} + a'_{2j}A'e_{j_2} + \ldots a'_{kj}A'e_{j_k}.$$

Si nous appliquons P^{-1} des deux côtés, nous obtenons

$$Ae_j = a'_{1j}Ae_{j_1} + a'_{2j}Ae_{j_2} + \ldots a'_{kj}Ae_{j_k}.$$

Dans cette égalité les vecteurs $Ae_{j_i} = P^{-1}e_i$ sont linéairement indépendants. Donc les coefficients a'_{1j} sont uniques et déterminés par A.